VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ

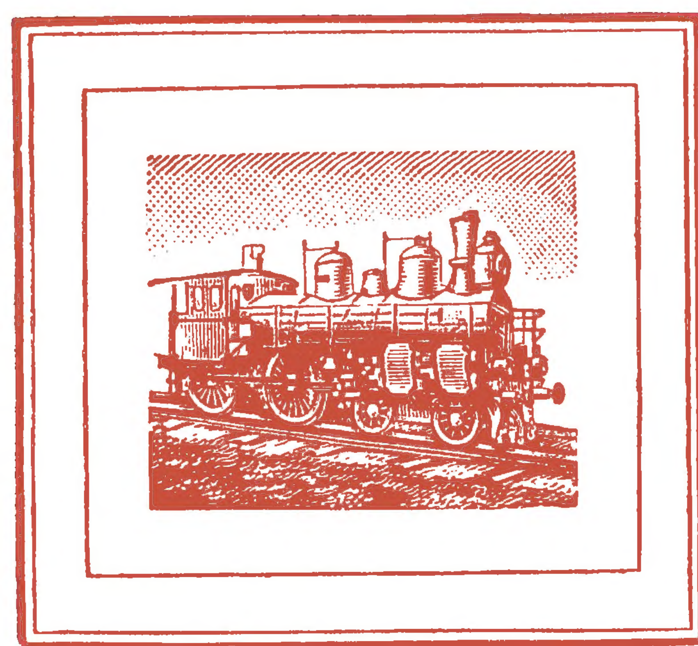


Н. П. ПЕТРОВ

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СМАЗКИ

ИЗБРАННЫЕ РАБОТЫ

РЕДАКЦИЯ И КОММЕНТАРИИ
АКАДЕМИКА Л. С. ЛЕЙБЕНЗОНА

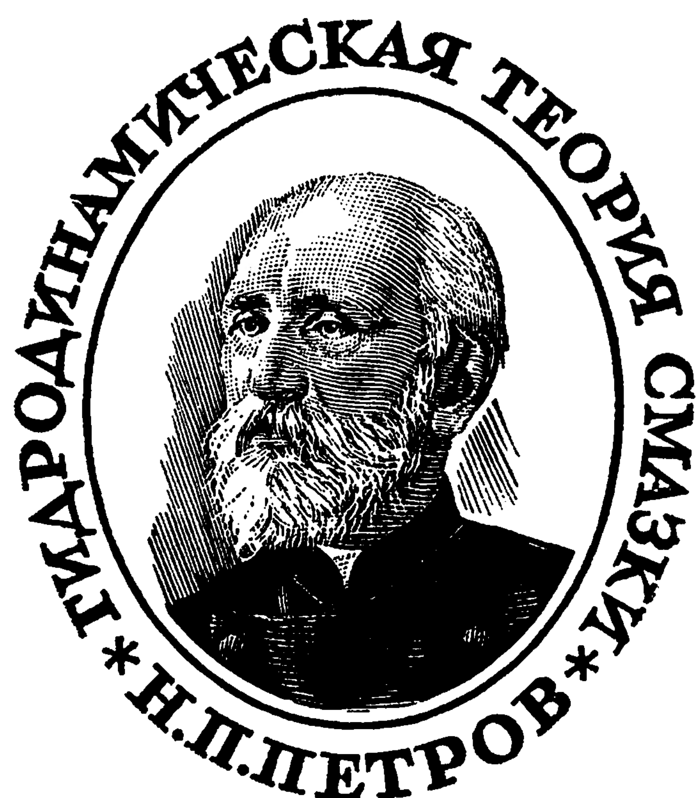


ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
1948

Под общей редакцией Комиссии Академии Наук СССР
по изданию научно-популярной литературы

Председатель Комиссии президент Академии Наук СССР
академик *С. И. ВАВИЛОВ*

Зам. председателя член-корреспондент Академии Наук СССР
П. Ф. ЮДИН


ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СМАЗКИ
* Н.П.ПЕТРОВ *

ТРЕНИЕ В МАШИНАХ И ВЛИЯНИЕ НА НЕГО СМАЗЫВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

1. В последнее десятилетие нефтяная промышленность получила у нас чрезвычайно сильное развитие. Заводы, занимавшиеся первоначально добыванием керосина из нашей нефти, были очень озабочены весьма малым выходом его сравнительно с выходом из американской нефти. В то время как в Америке получали до 70% керосина, у нас приходилось ограничиваться 30% и считать остальные 70% отбросом. Это обстоятельство заставило, да можно сказать, и поныне еще заставляет наши керосиновые заводы изыскивать средства для превращения их остатков в какие-нибудь полезные продукты. Результатом таких изысканий явилось, между прочим, приготовление смазывающих веществ. На рынке получилось, вместе с растительными маслами, множество минеральных масел. В это же почти время явились в продаже смазочные масла, получаемые при сухой перегонке дерева. Цена новых смазочных материалов оказалась вообще гораздо ниже прежде изготовлявшихся растительных масел или животных жиров, и, сверх того, сами минеральные масла и жиры и масло от сухой перегонки дерева, предлагавшиеся по весьма различным ценам, имели, видимо, весьма различные свойства. Одни из них были прозрачны, слегка окрашены в желтый цвет, по виду очень похожи на растительные масла и могли бы быть получены даже совершенно бесцветными, как вода; другие были гораздо темнее, и множество из них было почти черного цвета. Густота их и кажущаяся

возможность смазывания были до крайности различны. Не будь цена этих масел, в особенности черных, в три, в четыре раза ниже растительных масел, к которым техники давно привыкли, очень может быть, что они не обратили бы большого внимания на новые смазочные масла, несмотря на то, что эти масла, независимо от цены, представляют некоторые несомненные преимущества перед растительными.

Но возможность сделать большую, нередко многотысячную экономию в расходах на смазочные материалы побудила техников испытать новые вещества. Опыты показали, что смазывание нашими минеральными маслами, вообще говоря, возможно, но иногда оказывались и довольно большие неудобства.

В некоторых случаях непозволительное нагревание смазанных частей машин появлялось уже слишком часто. В чем заключалась причина неудач,— это еще и до сих пор не вполне выяснилось. Решение этого вопроса, конечно, интересует техников, но вместе с тем возник другой, несравненно более важный вопрос, имеющий значение в экономической жизни народа.

2. Машинные части смазывают для того, чтобы уменьшить вредную работу трения; а бывшие уже опыты показывают, что различные смазывающие вещества не одинаково достигают этой цели, что при различных условиях смазывания трение может быть чрезвычайно различно, что в одном случае оно может быть больше, чем в другом, в 1.5, в 2 и даже иногда в 8 и 10 раз. Очевидно, что если дешевое масло вызовет несоответственно большую работу трения, то и весьма большие сбережения на смазке могут не окупить излишних расходов на топливе; мало того, эти расходы могут в несколько раз превзойти сбережения, сделанные на смазке. Расходы на топливо для машин, считающиеся у нас в России десятками миллионов, заслуживают самого серьезного внимания. Увеличение расхода на топливо

на 5, на 10% может легко явиться вследствие неудовлетворительных условий смазывания, а это выразится в народном хозяйстве потерями миллионов рублей.

Таковы теперь причины, заставляющие наших техников обратить все свое внимание на правильный выбор смазочных материалов, и немудрено, что у них беспрестанно является вопрос: как выбрать смазочный материал?

Те же самые причины побудили и меня написать эту статью, чтобы по мере моих сил содействовать развитию техники.

3. Изучение обстоятельств, влияющих на силу трения машинных частей, мне казалось тем более необходимым, что есть несомненные указания на возможность появления очень различных сил трения при употреблении даже одного и того же смазывающего вещества, но при изменении некоторых условий смазывания, например притока смазки. Эти исследования, наконец, могут показать техникам, в какой мере правильно распространенное между всеми убеждение, что цапфы в машинах надо делать как можно более тонкими с тем, чтобы уменьшить пути, проходимые точками приложения сил трения, и, следовательно, уменьшить работу трения. Это, повидимому, столь понятное правило нельзя теперь считать несомненным, допуская даже, что длина цапф будет достаточно велика, чтобы смазка не выдавливалась. Некоторые опыты заставляют думать, что уменьшать диаметр полезно только до известного предела. Уменьшение диаметра цапфы за этим пределом, увеличивая гибкость цапфы, увеличивает тем самым величины сил трения более, чем уменьшает проходимые ими пути, и, следовательно, не уменьшает, а увеличивает работу сил трения.

Изучение указанных вопросов относится теперь, без сомнения, к числу выдающихся потребностей техники или инженерного дела, понимая это выражение в его обширном смысле.

4. Для разрешения всех вопросов, касающихся трения, было бы достаточно одного: правильно определить зависимость коэффициента трения от свойств смазывающего вещества и от других обстоятельств, имеющих на него влияние. К сожалению, надо, однако, сказать, что совершенно полное определение представляет крайние трудности.

Ввиду того множества опытов, которые были сделаны над трением машинных частей, такое замечание может сначала показаться по меньшей мере странным, но оно действительно справедливо. Все бывшие доныне опыты над трением машинных частей представляют результаты совокупного влияния многих обстоятельств, из которых каждое могло весьма много изменить окончательный результат опыта, определявшего величину отыскиваемого коэффициента трения. Пока нет надобности выделять влияние какого-нибудь из обстоятельств, обусловливающих величину работы сил трения, до тех пор результаты сделанных опытов могут приносить пользу, указывая главным образом наиболее часто встречающиеся величины сил трения. Но как только интерес сосредоточивается на влиянии какого-нибудь одного обстоятельства, бывшие опыты, не исключая и опыта Терстона, доставляют слишком недостаточный и мало надежный материал. В настоящей статье нас интересует именно влияние отдельных обстоятельств, и в особенности то влияние, которое оказывают свойства смазывающего вещества.

Такое решение вопроса возможно только в том случае, если мы найдем способ открыть все элементы, влияющие на изучаемый нами коэффициент трения, другими словами, если мы найдем все те независимые переменные, от которых зависит исследуемая функция, и если влияние на нее каждой переменной изучим *в отдельности.* Без отдельного изучения влияния каждой переменной обойтись нельзя, потому что, изучая влияние какой-нибудь переменной и опуская в то же время влияние другой, тоже изменяющей свою величину независимо от нашего произвола, мы получим изменения функций, соответствующие

разным совокупностям нескольких переменных, а предполагая, что изменяется всего только одна избранная нами переменная, и приписывая таким образом этой переменной совсем не то, что на самом деле она может произвести, мы можем сделать самые ошибочные заключения.

5. Всестороннее изучение вопроса сделается возможным только после обширных и хорошо организованных опытов, для которых мы постараемся указать главнейшие условия, соответствующие современному состоянию дела, и остановимся главным образом на изучении вопроса, какое влияние могут оказать свойства смазывающей жидкости на величину коэффициента трения. Влияние других элементов будет тоже указано в той мере, в какой теперь это возможно. Что касается влияния жидкости, употребляемой в виде смазки, то оно существенно зависит от ее внутреннего трения и от трения с твердыми телами. Решение этого частного вопроса достигается только после установления несомненным образом тех законов, которым подчиняются силы трения жидких тел, проявляющиеся внутри жидкостей и на их поверхностях прикосновения с твердыми телами. Об этих законах физики держатся еще разных взглядов, совсем не способных слиться в один. К одному из этих взглядов надо примкнуть, а другой надо отбросить. Правильный выбор между двумя существующими воззрениями представляется в настоящем случае делом первостепенной важности, так как законы эти составляют основу нашего исследования. Пока не будет возможности правильно остановиться на том или другом законе трения жидких тел, до тех пор и изучение вопроса о влиянии свойств жидкой смазки на трение машинных частей будет невозможно.

Чтобы сознательно примкнуть к одному взгляду и отбросить другой, есть только один верный путь: надо проследить все те характерные опыты и исследования над трением жидких тел, которые привели физиков к неодинаковым заключениям о

законах трения. Путь этот, правда, не легок, но так как он неизбежен и необходим, то сколько бы места и времени для него ни потребовалось, во всяком случае следует сделать это дело прежде всего. Это исследование действительно занимает довольно большую долю статьи и скорее относится к области физики, чем к технике, но я решился его здесь поместить, чтобы освободить читателя, серьезно интересующегося настоящим техническим вопросом, от необходимости разыскивать и изучать тот разбросанный материал, без которого нельзя приступить к основательному разрешению задачи. Мне казалось это как бы отступление тем более позволительным и даже должным, что инженерное дело и вообще техника пришли теперь в тот фазис их развития, когда для решения многих вопросов физические методы исследования оказываются безусловно необходимыми. Да и вообще можно уже сказать, что чем больше техника будет развиваться, тем чаще в ней будут встречаться вопросы, требующие для своего решения самых строгих способов исследования. Справедливость этого замечания более всего обнаруживается при изучении нарождающейся теперь технической отрасли, получившей название электротехники.

6. Обращаясь теперь к нашему прямому делу, надо прежде всего заметить, что во время движения машины относительное движение смазанных частей сопровождается относительным движением частиц смазывающего вещества одной по другой, движением частиц смазки относительно твердых тел и, наконец, иногда и относительным движением некоторых мест самих твердых тел без посредства смазывающего вещества.

При каждом из этих трех родов относительного движения возникает трение:

при относительном движении частиц жидкости — внутреннее трение жидкости;

при относительном движении частиц жидкости и твердого тела — внешнее трение жидкости;

при относительном движении одного твердого тела по другому, непосредственно соприкасающемуся,— трение твердых тел.

Вообще говоря, все эти три рода трения могут проявляться одновременно, и величина полного сопротивления будет зависеть от степени участия, принимаемого каждым из упомянутых трех родов трения в производимом ими явлении; но в громадном большинстве случаев, встречающихся в обыкновенных обстоятельствах движения машин, трение от непосредственного прикосновения двух твердых тел не появляется совсем.

7. Существование силы трения познается вообще из того всем давно известного факта, что если два какие бы то ни было тела не одинаково скоро двигаются в некотором направлении, параллельно плоскости их взаимного прикосновения, то быстро двигающееся тело стремится увеличить скорость тела, медленно двигающегося, и в свою очередь тело, медленно двигающееся, уменьшает скорость тела, двигающегося быстро. Силу трения можно замечать всегда и повсюду, и ее надо поставить в ряду могущественнейших способов, при посредстве которых природа превращает один вид энергии в другой, мало-помалу заменяя видимые движения движениями тепловыми. Эта сила, обнаруживая свое влияние в самых разнообразных явлениях природы, возбуждает живой интерес ученых самых разнообразных направлений. Знание законов трения необходимо и астроному, и физику, и физиологу, и технику. При посредстве трения работа или живая сила видимых движений может быть превращена в теплоту и в электричество. При посредстве той же силы притяжения солнца и особенно земли, вызывавшие приливы в океанах расплавленной лавы на луне, пока она была в раскаленном состоянии, задерживали вращение луны около ее оси и привели это вращение к такой скорости, при которой

теперь луна постоянно обращена к земле одною и той же стороной. Действием той же силы и на земле часть жидкости океана, составляющая прилив и удерживаемая притягательною силой солнца и луны, замедляет скорость вращения нашей планеты около ее оси и как ни мало, но удлиняет наши сутки. Та же самая сила в десятки и сотни раз уменьшает скорость движения воды в реках, каналах и трубах против той скорости, которую стремится сообщить сила тяжести. Скорость движения крови в наших жилах далеко не соответствует давлениям, возбуждаемым стенками сердца, которые заменяют действие силы тяжести, передвигающей воду в водопроводах. Двигатели на заводах, фабриках, пароходах и паровозах не малую долю своей работы производят только для того, чтобы при посредстве трения произвести теплоту. Можно сказать, что нет движения, совершающегося на земле, в котором не участвовало бы трение.

Как ни велико значение трения в явлениях природы и в движених, возбуждаемых по воле человека, как ни велико время, протекшее с тех пор, как трение стало известно, тем не менее не только нет еще точного, но нет и бесспорно приближенного понятия о существе силы трения. Только для газов, основываясь на их кинетической теории, можно было составить довольно ясное представление о схеме явления, называемого внутренним трением в газах,[1] но последние работы Гирна[2] заставляют и тут еще воздержаться от окончательного принятия этой схемы. Во всяком случае в настоящей статье нет прямого повода заниматься трением в газах, и речь будет итти только о трении твердых и жидких тел, входящих в состав машин.

---

[1] *Oskar Emil Meyer.* Kinetische Theorie der Gase. 1877, § 64—68.

[2] Журн. Русск. физ.-хим. об-ва, т. XIV, в. 3, стр. 42 отдела второго.

Трение твердых тел

8. Трение между твердыми телами приписывается последователями Кулона зацеплению одного тела другим (говорят, что незаметные выступы на поверхности одного тела попадают во впадины другого) и частичному притяжению. Другие физики считают, что частичное притяжение можно вовсе не принимать в расчет.[1]

Наблюдения и опыты над силою трения хотя и ведут свое начало со времен Декарта и его школы и хотя среди имен наблюдателей встречаются имена Ньютона, Мариотта, Кулона и др., тем не менее еще не найдено таких результатов, на основании которых можно было бы установить несомненным образом законы трения твердых тел.

9. В настоящее время большинство физиков принимает три весьма известных закона трения, установленных Кулоном и подтвержденных Мореном.[2]

1) Сила трения пропорциональна нормальному давлению, исключая только те чрезвычайно редкие, по замечанию Морена, случаи, когда слишком большое давление разрушает некоторым образом трущиеся тела на их поверхностях.

2) Сила трения не зависит от величины поверхности взаимного движения трущихся тел.

3) Сила трения не зависит от скорости относительного движения трущихся тел.

Сверх того принимается, что сила трения зависит от свойств трущихся материалов и от состояния взаимно касающихся поверхностей. В этом последнем отношении известно только то, что с увеличением полировки прикасающихся поверхностей сила трения уменьшается.

---

[1] *Poncelet.* Introduction à la mécanique industrielle. 3-ième édition.

[2] *A. Morin.* Expériences sur le tirage des voitures.

10. Новейшие опыты, главным образом Пуаре и Боше,[1] не только подтверждают действительность появления не одинаковых сил трения для разных материалов и влияние того состояния, в котором находятся трущиеся поверхности, но еще указывают, что это влияние чрезвычайно велико и притом крайне неопределенного свойства. Оказывается, что какие-то совершенно неуловимые обстоятельства способны весьма сильно изменять величину силы трения.[2] Из фиг. 4 на табл. II, приведенной в сочинении Боше, легко удостовериться, что при обстоятельствах, повидимому вполне тождественных, встречаются коэффициенты трения и 0.22, и 0.5, и другие, промежуточные.

11. Одна эта неполная определенность, проистекающая от незнания, как установить все необходимые условия, вполне определяющие явление, уже лишает возможности найти точные законы трения и вынуждает останавливаться на некоторых более или менее грубых приближениях. С той степенью точности, которая допускается только что указанными в § 10 обстоятельствами, Боше из своих опытов все-таки считает возможным признать первый закон Кулона довольно правильным.[3] Второй закон Кулона оказывается еще менее точным.[4] Повидимому, при очень малых давлениях (как, впрочем, замечал и Кулон), точно так же как и при очень больших (как замечал Морен, см. § 98), величина коэффициента трения значительнее, чем при некоторых средних. Величина давления, приходящаяся на квадратную единицу поверхности прикосновения, которой соответствует наименьший коэффициент трения, зависит от многих обстоятельств. Наконец, третий закон Кулона совсем не под-

---

[1] *Bochet.* Sur le frottement de glissement.
[2] Id, p. 48 et suiv.
[3] Id., p. 88.
[4] Id., p. 87.

тверждается даже и с той грубою степенью точности, какая выше была уже указана.

Опыты Боше [1] и затем опыты Гальтона [2] показывают с ясностью, что сила трения уменьшается при увеличении скорости. Зависимость f, коэффициента трения, от скорости v Боше выражает посредством коэффициентов трения k при скорости, почти равной нулю, и γ — при скорости чрезвычайно большой, формулою

$$f = \frac{k - \gamma}{1 - av} + \gamma,$$

где a есть некоторый численный коэффициент, зависящий от единиц меры, принятых при определении скорости v.

Коэффициенты трения, найденные Гальтоном, оказались значительно меньше найденных Боше. Это различие вполне допустимо, ввиду возможности влияния тех, еще не разгаданных поныне причин, которые при опытах Боше, несмотря на казавшуюся тождественность условий, сообщали коэффициенту трения столь различные между собой величины, как 0.22 и 0.50.

12. Основываясь на изложенном выше, относительно силы трения твердых тел можно сказать:

1) Сила трения почти пропорциональна нормальному давлению.

2) Она некоторым образом зависит от величины давления приходящегося на квадратную единицу площади прикосновения, и как при чрезвычайно малых, так и при чрезвычайно больших давлениях она больше, чем при некоторых средних.

3) Она уменьшается при увеличении скорости.

4) Она зависит от свойств трущихся тел.

5) Она зависит от состояния трущихся поверхностей и становится тем меньше, чем лучше полировка поверхностей.

---

[1] Id., p. 86.

[2] Engineering, 1878, August 23, p. 153.

2*

6) Она весьма много зависит от каких-то еще не разъясненных причин.

Наконец, следует заметить, что влияние температуры трущихся тел вовсе не было изучаемо и что не известно еще никаких попыток найти связь между величиною силы трения и явлениями упругости, хотя, повидимому, без такой связи трение не могло бы развивать теплоту.

Трение жидкостей

13. Наблюдения над движением воды в реках, каналах и трубках, над вытеканием из разных отверстий, над движением твердых тел в воде, развитием в жидкостях теплоты посредством движения их, как делал Джоуль, и многие другие явления заставляют предполагать, что относительное движение жидкостей между собою или с твердыми телами сопровождается трением. Старинные и всем известные опыты над водопроводами указывают даже, что сила трения жидкости возрастает вместе с увеличением скорости движения; но установление законов этого трения и доныне представляет большие затруднения. Трудность задачи определения законов внутреннего и внешнего трения жидкости происходит оттого, что нет возможности непосредственно измерить ни относительное перемещение трущихся частиц жидкости, ни силу трения в данной точке жидкости. Правда, что в иных случаях можно непосредственно измерить совокупное действие сил трения некоторой жидкой массы, как в опытах Кулона или им подобных; но относительное перемещение частиц в этой жидкой массе остается во всяком случае недоступным наблюдению. Относительно зависимости силы трения от относительной скорости или относительно закона, которому следуют изменения скорости частиц жидкости в разных ее местах, приходится по необходимости делать предположения — принимать гипотезы.

14. Первое место в этом деле принадлежит Ньютону, установившему следующие четыре закона трения жидких тел:

1) Сила трения пропорциональна скорости относительного движения.

2) Она пропорциональна поверхности прикосновения, вдоль которой совершается относительное движение.

3) Она зависит от свойств жидкости.

4) Она не зависит от давления.

О температуре Ньютон не говорит, и влияние ее показали потом Дюбуа, Герстнер, Жирар и особенно Пуазейль, причем обнаружилось, что

5) Сила трения уменьшается при повышении температуры.

Наконец, опыты Плато показали, что

6) Сила трения изменяется вместе с изменением расстояния от поверхности жидкости. В некоторых жидкостях, каковы, например, вода, глицерин, насыщенный раствор соли, насыщенный раствор селитры, сила трения около поверхности больше, чем внутри жидкости, вдали от поверхности; а в других жидкостях, каковы спирт, скипидар, оливковое масло, она у поверхности больше, чем внутри, вдали от поверхности жидкости.

15. Второй и третий законы Ньютона принимаются всеми физиками и гидравликами, но первый из вышеупомянутых законов (см. § 14), принимаемый большинством физиков и гидравликов, отвергается еще многими.

Поверка этой гипотезы, несмотря на видимую ее простоту, представляет затруднение, потому что относительная скорость при опытах остается неизвестною; даже вычисление этой скорости на основании гипотезы Ньютона представляло такие трудности, что такой математик, как Навье, раньше всех других показавший (в 1882 г., почти через 150 лет после выхода сочинения Ньютона), как ввести силы трения в уравнения

движения жидкости, должен был несколько видоизменить гипотезу Ньютона.

Навье,[1] а за ним и Пуассон[2] приписывали трение жидких тел между собою или с твердыми телами изменению величин отталкивательных сил, действующих между частицами жидкости. По их мнению, относительное движение слоев жидкости производит приближение более быстро двигающихся частиц к частицам, двигающимся с меньшими скоростями. Это сближение должно увеличивать силы отталкивательные, задерживая движение частиц, двигающихся быстро, и ускоряя движение частиц, двигающихся медленно.

16. Современные нам физики и гидравлики не допускают существования отталкивательных сил в жидкостях. Это допущение противоречит основным понятиям механической теории тепла и потому невозможно. Чтобы несколькими словами объяснить эту невозможность, достаточно сказать, что действие отталкивательных сил надо прежде всего допустить в газах. Но если бы такие силы действовали в газах, то при расширении их, когда внешние силы не производят работы, эта материальная система подвергалась бы действию только таких сил, которые производят положительную работу, и эти силы должны были бы увеличить живую силу системы. Это увеличение, при отсутствии видимого движения газа, должно было бы обнаружиться повышением температуры газа. Опыты Джоуля, сделанные с газами при указанных условиях, повышения температуры, однако, не показали и таким образом опровергли предположение о существовании отталкивательных сил в жидкостях.

Поэтому Сен-Венан, Клейтц, Гельмгольц, Мейер, Кирхгоф и др. принимают, что перемещение частей жидкости возбуждает

---

[1] Mém. l'Inst. de France, t. VI.

[2] Journ. de l'École Polytechn., t. XIII, cah. XX.

в ней упругие силы, подобно тому как возбуждаются упругие силы в твердых телах при изменении их вида, с тою только разницею, что в твердых телах упругие силы считаются пропорциональными относительным перемещениям, а в двигающихся жидкостях эти силы, согласно с гипотезою Ньютона, считаются пропорциональными относительным скоростям движения разных частей бесконечно малого элемента жидкости.

Упругие силы этого рода, развивающиеся в жидкости, пока струи ее не подвергаются разрывам, называются силами липкости жидкости. Влияние липкости на движение жидкости можно выразить дифференциальными уравнениями, как показал, например, Кирхгоф,[1] и эти дифференциальные уравнения нисколько не отличаются от уравнений Навье.

17. Этими уравнениями необходимо воспользоваться при исследовании трения смазанных частей машин, если желательно обнаружить влияние свойств смазывающей жидкости на величину трения. Но так как в основу вывода этих уравнений ставится, между прочим, первая (см. § 14) гипотеза Ньютона о трении жидких тел, далеко не всеми физиками принимаемая бесспорною, то прежде всего необходимо проверить, насколько правильно применение этой гипотезы.

Проверка какой бы то ни было гипотезы может быть сделана только путем сличения опытных результатов с выводами, вытекающими из вычислений, или вообще с логическими выводами, сделанными на основании принятой гипотезы; и только тогда можно принять гипотезу за основу новых исследований, когда не будет в виду ни одного факта, сколько бы то ни было противоречащего выводам. Это обстоятельство заставляет нас припомнить все без исключения факты, найденные сделанными до сих пор опытами, и рассмотреть, насколько

---

[1] Vorlesungen über math. Phys., 24 Vorlesung, S. 370.

каждый из них может служить подтверждением или опровержением гипотезы Ньютона.

Все сделанные до сих пор опыты, из которых извлекаются факты, более или менее способные служить при проверке подвергающейся сомнению гипотезы Ньютона, относятся к движению воды в трубах и каналах и к движению твердых тел в воде.

Обращаясь к наблюдениям и исследованиям, касающимся трения жидких тел, с целью проверить, насколько правильно, при теперешнем состоянии наших знаний, пользоваться гипотезою Ньютона при исследовании новых вопросов, мы проследим все характерные опыты, кем бы они ни были произведены — гидравликами или физиками, и покажем, что в настоящее время не известно ни одного факта, опровергающего гипотезу Ньютона, состоящую в том, что *сила трения в жидкостях пропорциональна первой степени скорости относительного движения.*

Не желая упустить из виду ни одного обстоятельства, способного так или иначе осветить рассматриваемый вопрос, надо начать с наиболее старинных указаний и дойти до опытов или исследований, сделанных новейшими наблюдателями или учеными.

Опыты и исследования для определения законов трения жидкостей

18. В конце XV столетия, при самом начале возрождения искусств и наук после продолжительного их застоя, длившегося в течение всей эпохи средних веков, один из величайших человеческих гениев — Микель Анджело — руководил, между прочим, устройством многих каналов и других гидротехнических сооружений. Эти работы побудили его заняться наблюдением движения воды в реках и каналах. Скорость движения воды он определял двойным поплавком. Эти наблюдения, конечно, показали ему различие скоростей струи на поверхности воды и внутри потока; поэтому полагают, что Микель

Анджело знал о существовании трения в жидких телах. Если Микель Анджело и действительно знал, то с этого времени начинается только знакомство с явлениями трения, а не изучение их, и хотя Декарт (живший с 1590 по 1650 г.) тоже знал [1] о трении между двигающимися один по другому слоями жидкости, тем не менее стремление определить силу трения и влияние ее на движение жидкости проявилось только в конце XVII столетия в сочинениях, вышедших почти одновременно в Англии и Италии. Ньютон в знаменитом своем сочинении «Philosophiae naturalis principia matematica», изданном в 1687 г., говорит об этом предмете в книге II, и итальянский профессор медицины и математики в Падуанском университете Гиллельмини в сочинении, изданном в 1697 г. под названием «Della natura de fiumi», старался определить влияние трения жидкости о стенки канала.[2] Следовавшие затем гидравлики, физики и математики в течение долгого времени придерживались относительно жидкости идеи Ньютона, высказанной им в определении жидкостей, где он говорит: «Жидкостью называется всякое тело, частицы которого уступают *всякой* силе и под влиянием этой силы легко двигаются одна по другой».[3] Из этого определения выводим, что внутри жидкостей трения не происходит, несмотря на то, что в том же сочинении Ньютон не только говорит, что трение есть, но определяет и зависимость его от относительной скорости. Выражение Ньютона следующее: «Сопротивление, происходящее от несовершенной скользкости частиц жидкости, при разных скоростях и прочих равных обстоятельствах, пропорционально скорости относительного движения частиц».[4] Все физики и гидравлики, придерживав-

---

[1] Rapport par Mm. Combes, Serret, Bonnet, Phillips et Saint-Venant. C. R., t. LXVIII, p. 582.

[2] *Bossut.* Traité d'hydrodynamique, t. 2.

[3] Mathematische Principien der Naturlehre, S. 282, § 26.

[4] Phil. nat. princ. math., LII, Sec. IX, § 73, см. нем. пер., стр. 368.

шиеся такого взгляда на вещи, допускали, что при движении жидкостей трение может происходить только между жидкостью и твердыми телами, окружающими жидкость.

19. Под влиянием этих взглядов в 1732 г. Купле делал опыты над версальскими водопроводами. Но, несмотря на большое число опытов над трубами разных диаметров, он извлек только некоторые практические правила, ничего не говорившие ни в подтверждение, ни в опровержение гипотезы Ньютона, что сопротивление жидкости пропорционально первой степени относительного движения.

Затем, по замечанию Жирара[1] в 1775 г. Шези написал впервые уравнение равномерного движения воды в канале, принимая в расчет трение ее о поверхность канала и предполагая, что в жидкости трения нет.

Шези, обозначая

Q — площадь поперечного сечения воды в канале,

h — падение на единицу длины канала,

p — длину смоченного периметра поперечного сечения канала,

v — среднюю скорость течения воды в канале,

a — некоторую постоянную величину, нашел, что

$$Qh = apv^2.$$

Опыты Шези подтвердили, что a — действительно величина постоянная, и дали возможность определить ее.

Дюбуа в сочинении, опубликованном в 1779 и 1786 гг. под заглавием «Principes d'hidraulique», представляет целый ряд опытов над движением воды в трубах и открытых каналах, послуживших материалом для позднейших исследований. Сам Дюбуа нашел для них эмпирическую логарифмическую формулу.

---

[1] Mém. l'Inst. de France, 1813, 1814, 1815, p. 550 et 551.

Сюда же надо отнести и сочинение замечательного в свое время знатока гидравлики Боссю: «Traité d'hydrodinamique». В томе II, на стр. 143, Боссю для движения воды в трубах принимает то же уравнение, что и Шези.

20. Таким образом, все опыты над движением воды в трубах и каналах, делавшиеся в прошлом столетии, до самого начала нынешнего столетия не подтверждали предположения Ньютона, что трение воды о твердые тела пропорционально первой степени скорости течения воды. Исследования Шези и Боссю заставляли думать, что трение пропорционально поверхности прикосновения и квадрату скорости; а по исследованиям Гагена[1] наблюдений Купле, Боссю и Дюбуа оказалось, что трение воды о твердые тела пропорционально скорости трения, возвышенной не в квадрат, а в степень, равную 1.75, и притом, что показатель степени становится еще меньше, когда длина трубы увеличивается. Так как все эти опыты и исследования не только не опровергают (как сначала кажется) гипотезы Ньютона, но и не могут дать материала для ее опровержения или подтверждения, то о них упоминается здесь лишь с тем, чтобы не оставить повода к предположению, что они упущены из виду.

21. В конце прошлого столетия высказывает новые взгляды Кулон. Он вспоминает, что Ньютон при определении сопротивления, встречаемого шаром, колеблющимся в воздухе, считал, что это сопротивление выражается в зависимости от разных степеней скорости формулою[2]

$$av^2 + bv^{\frac{3}{2}} + cv,$$

---

[1] Kgl. Akad. d. Wissensch., Berlin, 1854, S. 92.

[2] Phil. nat. princ. math., II, No. 40; в нем. пер. § 42, стр. 307.

а в другом месте того же сочинения,— что сопротивление выражается формулою

$$av^2 + b;$$

что такую же зависимость между сопротивлением и скоростью принимал Бернулли и что Сгрэвезэнд считал, что сопротивление выражается суммою членов, содержащих скорость в квадрате и в первой степени, формулою

$$av^2 + bv,$$

где v — скорость, а коэффициенты a, b, c суть постоянные величины. Поэтому Кулон говорит,[1] что при движении воды со скоростями в 0.2—0.3 м или более сопротивление будет пропорционально квадрату скорости; но когда скорость движения воды будет гораздо меньше, например 0.001 м, то сопротивление будет выражаться теми членами формулы, в которых скорость входит в первой степени, значение которых пропадало перед величиною членов, содержащих скорость в квадрате при больших ее величинах.

Полное сопротивление жидкости Кулон приписал двум причинам — ударам и липкости — и полагал, что формула, выражающая сопротивление, будет содержать член, пропорциональный квадрату скорости, зависящий от ударов, и член, пропорциональный первой степени скорости, зависящий от липкости жидкости; что удары обнаруживают преобладающее влияние при больших скоростях и что, напротив, при малых скоростях наиболее видная роль будет принадлежать липкости. Чтобы определить, какое влияние оказывает прилипание, Кулон предпринял ряд опытов.

Опыт он делал со своими крутильными весами, в которых круглый плоский диск вращался около своей геометрической оси вращения внутри испытуемой жидкости. Скорости враще-

[1] Mém. l'Inst. de France, t. III, p. 246.

ния были чрезвычайно малы, около 0.001 м/сек. Члены, содержащие квадрат этой скорости, в формуле, выражающей сопротивление, Кулон считал себя вправе отбросить как ничтожные и, исходя из этого предположения, определил влияние прилипания для воды и для масла, употреблявшегося в то время для ламп.

22. Так как прибор Кулона очень прост и заманчив и так как результаты, полученные Кулоном, не все верны, то, говоря здесь о прилипании жидкостей и о влиянии его на трение, нельзя не привести результатов, полученных Кулоном, и не показать причины неверности его определения.

Результаты опытов Кулона оказались таковы:

1) Сопротивление, которое встретила бы поверхность величиною в квадратный метр, двигающаяся в ее плоскости со скоростью в один сантиметр в секунду, было бы равно 0.703 г.[1]

2) Вязкость или липкость воды, в пределах температуры от 10 до 16° Реомюра, не изменяется заметным образом.[2]

3) При температуре 16° Реомюра вязкость масла (очищенного, продажного, лампового) больше вязкости воды в 17.5 раза, и при повышении температуры вязкость масла быстро убывает (см. § 66).

4) Давление, под которым находится жидкость, не имеет влияния.

Сила трения, найденная Кулоном для воды и приписываемая им липкости, не согласуется с новейшими, несомненно, более точными определениями. С первого взгляда можно сказать, что неточности определения и следовало ожидать ввиду того, что Кулон, имея дело в опыте с полной силой трения, а не с одним ее членом, брал тем не менее формулу

$$bv,$$

[1] Mém. l'Inst. de France, t. III. p. 282.

[2] Id., p. 32.

взамен формулы

$$av^2 + bv.$$

Отбрасывание члена av^2 должно было привести его к отысканию для b несколько большей величины, чем действительно следовало бы при применении правильной формулы. На основании этого надо было бы думать, что последующие, более точные изыскания покажут, что сцепление или липкость при скорости в 1 см, приходящиеся на величину площади в 1 м^2, будут меньше, чем 0.703 г; а между тем опыты Пуазейля, отлично подтвержденные опытами французской академии и опытами Якобсона, показывают, что при этой скорости и при температуре 16°R или 20° C сцепление или трение воды не меньше, а почти в 1.5 раза больше, чем то, какое нашел Кулон, и именно, оно равно 1.027 г (см. § 55). Еще бóльшую величину коэффициента внутреннего трения воды нашел О. Е. Мейер,[1] употреблявший для своих опытов крутильные весы Кулона. По его наблюдениям оказалось, что колодезная вода при температуре 19° C имеет коэффициент трения, равный 1.172 г. Эта весьма большая разница происходит потому, что при опытах Кулона вместе с его диском двигалась и вода и что движение диска относительно прилегавшего к нему слоя воды и относительные движения множества таких слоев воды, перемещавшихся один по другому, происходили вовсе не со скоростью самого диска, которую Кулон вводил в формулу, а со скоростями значительно меньшими. Найденное путем опыта трение или сцепление соответствовало не той скорости, которую имел диск, а другой — меньшей, которую и надо было бы вставить в формулу

$$bv$$

для определения величины b.

---

[1] *O. E. Meyer.* Ueber die Reibung der Flüssigkeiten. Pogg. Ann., Bd. 113, 1861, S. 400.

Очевидно, что если бы Кулон вставил скорость, правильно определенную, то получил бы для b число больше того, которое он нашел.

Но для отыскания истинной скорости относительно движения воды Кулону надо было знать тот закон движения жидкости, который вызывается движением диска. Закон этот не был ему известен, точно так же как с точностью он не известен еще и современным физикам, хотя весьма приближенное решение вопроса для очень малых скоростей диска уже найдено О. Е. Мейером (см. § 65).

Мемуар Кулона если и не доставил, как теперь оказывается, точного определения силы сцепления, то все-таки обратил на нее внимание ученых и техников и побудил всех занимавшихся после него вопросами гидродинамики отступить от гипотезы Ньютона и выражать сопротивление от трения жидкости формулою, составленною из двух членов вида

$$av^2 + bv.$$

Эту формулу употребляют и поныне при решении разных вопросов о движении воды в водопроводах.

Что же касается скорости, входящей в эту формулу, то, несмотря на установившееся понятие о существовании липкости между частицами жидкости, подтверждавшееся и давнишними опытами Мариотта и Пито, показывавшими, что разные слои жидкости двигаются с разными скоростями, последователи Кулона принимали, что все частицы воды двигаются с одною общею скоростью и что влияние липкости обнаруживается только на поверхности прикосновения воды с трубою. Таким образом, вместо v, ставят в формулу среднюю скорость течения воды в трубе.

Опыты Кулона не могут теперь служить для проверки гипотезы Ньютона и только тогда доставят полезный материал, когда будет найден закон движения жидкости, окружающий

диск, когда сделаются известными относительные скорости внутри жидкости и на поверхности, отделяющей твердый диск от жидкости, как то сделал О. Е. Мейер.

23. Неправильное определение скорости, вводимой в формулу, выражающую величину сопротивления, обнаружил прежде всего современник Кулона Жирар. Он говорил,[1] что «хотя изыскания Прони относительно движения воды в трубах и каналах, в которых сопротивление жидкости выражено формулою Кулона

$$av^2 + bv,$$

могут вполне удовлетворить потребностям техники, но тем не менее надо сказать, что величины коэффициентов a и b нам надлежащим образом не известны. Их величины были найдены в предположении, что все частицы воды двигаются одинаковым образом с разными скоростями; а известно, что внутренние струи жидкости двигаются быстрее наружных. Это явление происходит, очевидно, от сцепления (cohèsion) жидкости. Для точного определения величин a и b надо было бы принимать в расчет не среднюю величину скорости, а ту скорость, с которою происходит движение воды относительно смачивающего слоя».

Естественно, что, чем меньше будет диаметр трубки, тем меньше будут различаться скорости внутренних и наружных струй. Если бы трубка была бесконечно малого диаметра, то средняя скорость не отличалась бы от скорости относительно смачивающего слоя; следовательно, для возможно более точного определения величин a и b надо делать опыты над трубками возможно малого диаметра. Принимая в расчет эти соображения, Жирар и предпринял опыты с трубками малого диаметра.

---

[1] Mém. l'Inst. de France, 1813, 1814, 1815, p. 257.

24. Медные трубки Жирара составляли две серии. Трубки одной серии имели внутренний диаметр 2.96 мм, внутренний же диаметр другой серии был 1.83 мм. Каждая отдельная трубка была около 200 мм, и из таких трубок можно было составить одну трубку длиною от 200 до 2200 мм.

Исследованию было подвергнуто то движение жидкости, когда его нужно было считать равномерным, т. е. когда силы двигающие уравновешивались с силами сопротивляющимися.

Если по горизонтальной трубке, у которой d — диаметр, l — длина, двигается жидкость и v — ее скорость, то, обозначая через h_1 давление на квадратную единицу площади поперечного сечения трубки в том конце ее, откуда вода течет, и через h_2— давление тоже на квадратную единицу площади поперечного сечения трубки в другом конце, где вода вытекает, для силы, двигающей жидкость, будем иметь выражение

$$\frac{\pi d^2}{4} h_1;$$

одна из сил сопротивления будет

$$\frac{\pi d^2}{4} h_2,$$

а другая сила сопротивления движению жидкости, перемещающейся внутри трубки, будет, на основании второй и третьей гипотезы Ньютона (см. § 14), пропорциональна поверхности прикосновения двигающейся струи со смачивающим слоем воды, прилипшей к стенкам трубки, т. е. площади

$$\pi d l,$$

и на основании идей Кулона будет пропорциональна некоторому двучлену

$$a v^2 + b v.$$

Следовательно, величина второй из сопротивляющихся сил выразится произведением

$$\pi dl(av^2 + bv).$$

Закон живых сил, в приложении к рассматриваемой струе воды, доставит уравнение

$$\frac{\pi d^2}{4} h_1 = \frac{\pi d^2}{4} h_2 + \pi dl(av^2 + bv),$$

а если вместо двух действительных давлений, действующих на концах трубки, ввести их разность и обозначить

$$h = h_1 - h_2,$$

то по упрощении последнего уравнения получим

$$\frac{dh}{4l} = av^2 + bv.$$

25. Опыты Жирара доставили ему довольно большой материал, из которого он вывел следующие заключения:[1]

1) Закон движения воды по трубке не всегда один и тот же: в длинных трубках он один, а в коротких — другой.

2) При достаточно большой величине длины трубки l, в величине отношения

$$\frac{dh}{4lv}$$

давление h и скорость v так изменяются, что вся величина отношения остается постоянною. А так как из предыдущего уравнения

$$\frac{dh}{4lv} = av + b,$$

[1] Mém. l'Inst. de France, 1813, 1814, 1815, p. 296—298.

то значит, что при достаточно длинных трубках вторая часть этого уравнения не заключает члена, содержащего скорость. Другими словами, это значит, что

$$a=0$$

и что

$$\frac{dh}{4lv}=b. \qquad \text{(I)}$$

Этот чрезвычайно важный результат, найденный Жираром, подтверждается всеми последующими опытами и составляет существенную часть закона, известного под названием закона Гагена — Пуазейля. Разница между этим последним и уравнением (I) Жирара, точно так же как и причина разницы, будет показана далее.

3) Предел, меньше которого длина трубки l не должна быть, чтобы движение воды происходило по тому закону, которому соответствует уравнение (I), становится тем больше, чем больше диаметр трубки d и чем больше давление h.

4) Если вода, протекающая по трубкам, имеет в разных опытах не одинаковые температуры, но если в том и другом случае удовлетворяется уравнение (I), то при одинаковых прочих обстоятельствах более нагретой воды притечет больше, чем воды менее нагретой,[1—3] и количества протекающей воды при температурах 0 и 86° относятся, как 1 : 4. Это отношение довольно значительно отличается от найденного Пуазейлем; но разницу их результатов надо отнести, во-первых, к тому,

[1] Влияние температуры на протекание воды в трубках раньше всех заметил Дюбуа, который говорил,что вода течет тем тише, чем ближе ее температура к точке замерзания. Затем влияние температуры наблюдал Гарстнер.

[2] Principes d'hydraulique, par M. le Chevalier Dubuat, t. II, p. 9, édit. 1816.

[3] Pogg. Ann., Bd. V, S. 160.

что при опытах Жирара вода нагревалась в сосуде вроде самовара и текла потом по трубке, ничем не защищенной от охлаждения, тогда как в опытах Пуазейля вода в трубке не охлаждалась; во-вторых, диаметры трубок, испытанных Жираром, были больше диаметров трубок Пуазейля, а влияние температуры в трубках большего диаметра не так значительно, как в трубках малого диаметра (см. далее, п. 10).

5) В коротких трубках, при которых уравнение (I) не удовлетворяется, влияние температуры на количество протекающей жидкости значительно слабее, и температурам 0 и 87° соответствуют количества, относящиеся между собою, как 5 : 6.

6) Коэффициент b, стоящий в уравнении (I), изменяется в зависимости от диаметра. Эта зависимость точным образом не указана Жираром; но если бы на основании его таблиц определить отношение коэффициентов b, полученных из наблюдений с двумя системами трубок, то это отношение было бы равно почти 1.3, тогда как отношение соответствующих диаметров самих трубок было равно

$$\frac{2.96}{1.83} = 1.62.$$

Это соотношение величин b и соответственных диаметров трубок не подтверждается ни опытами Гагена и Пуазейля, у которых трубки были меньшего диаметра, чем трубки Жирара, ни опытами Якобсона, производившего опыты с трубками большего диаметра, чем у Жирара. Все эти опыты показывают, что отношение между коэффициентами b, относящимися к трубкам разных диаметров, не только не возрастает при увеличении диаметра трубок, но, напротив, отношение между величинами b обратно пропорционально отношению между диаметрами соответственных трубок (см. § 49). Следовательно, опыты Жирара не дают надлежащим образом величину b в уравнении (I). Ошибка произошла, по всему вероятию, потому, что во время

опытов Жирара вода, двигавшаяся в трубках, не имела того движения, которое ей приписывали, и что движение частиц происходило не по прямым линиям, параллельным с осью, а было какое-то криволинейное. Это вероятное отступление от прямолинейного движения Гельмгольц приписывает[1] нечистоте внутренних стенок трубок, явившейся вследствие продолжительного действия воды на медь. Но, рассматривая таблицы Жирара, с этим мнением нелегко согласиться; поэтому Якобсон старался объяснить противоречие опытов Жирара с опытами Пуазейля и со своими другим образом. Он говорит,[2] что в уравнении (I), определяющем величину b, по самому выводу уравнения надо ставить ту величину h, которая соответствует давлению, действующему в начале трубки, а Жирар это давление не наблюдал и принимал его равным тому давлению, которое было в сосуде, доставлявшем воду в трубку, на уровне центра отверстия для трубки. Это допущение было неправильно, так как опыты Якобсона показали ему, что давление внутри трубки, подле самого ее начала, падает по мере удаления от отверстия гораздо быстрее, чем в остальных частях трубки, и притом в трубках большего диаметра падение больше, чем в трубках меньшего диаметра.[3]

Объяснение Якобсона тоже нелегко принять, потому что правильное отношение между величинами b, относившимися к трубкам в 2.96 и в 1.83 мм, получилось бы только в том случае, если бы давление, принимавшееся в расчет Жираром для трубок с диаметром в 2.96, было по крайней мере в два раза больше действительно бывшего. Опыты Якобсона хотя и заставляют

[1] *H. Helmholtz* und *G. v. Piotrowsky*. Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. «Sitzungsberichte D. k. k. Akademie der Wissensch. zu Wien» Bd. XL, S. 656, v. 12, April 1860; «Wissenschaftliche Abhandlungen von, Helmholtz», Erster Band, S. 220.

[2] Dr. *Heinrich Jacobson*. Reicharts und Dubois-Reymonds Archive 1860.

[3] *Jacobson*. Reicharts und Dubois-Reymonts Archive, 1860, S. 99.

думать, что внутри трубки Жирара, почти у самого ее начала, давление было гораздо ниже, чем в сосуде подле самого отверстия, но ни в одном из опытов Якобсона с трубками, имевшими диаметр 2.224 мм, не было отношения более 1.197 и даже с трубками диаметром 8.05 мм — больше 1.372. Мне кажется, что причину следует видеть в неудовлетворительности соединений коротких трубок между собою и с сосудом. Тут, вероятно, были какие-нибудь маленькие выступы, которые и вызывали различные возмущения в движении.

7) Величины b, разные для разных диаметров и температур, тем меньше различаются, чем выше температуры.

8) Изменение b на один градус тем больше, чем ниже температура.

9) Влияние температуры на количество вытекающей воды обнаруживается тем правильнее, чем меньше диаметр трубы.

10) Влияние температуры исчезает в трубках большого диаметра и в каналах.

26. Неправильное определение величины b, происшедшее от одной из вышеупомянутых причин или, может быть, под влиянием какой-нибудь совокупности их, привело Жирара к мысли, что внутри трубки находится слой жидкости, совершенно прилипшей к стенке трубки и остающейся совершенно без движения. Если бы это было так, то в уравнении (I) буква d выражала бы диаметр двигающейся струи, а не диаметр трубки внутри нее, и чтобы ввести диаметр самой трубки, называя его d_1, надо было бы заметить, что если толщину прилипшего к стенке слоя воды назовем e, то

$$d_1 = d + 2e \qquad \text{или} \qquad d = d_1 - 2e,$$

а уравнение (I) обратилось бы для одной системы трубок в

$$\frac{d_1 h}{4lv} = b_1 + 2e_1 \frac{h}{4lv}$$

и для другой системы трубок в

$$\frac{d_2 h}{4lv} = b_2 + 2e_2 \frac{h}{4lv}.$$

Опыты дают все величины каждого из этих двух уравнений, кроме величин e_1 и e_2; следовательно, уравнения дают возможность определить толщины этих слоев.

Для определения их Жирар дает формулы,[1] из которых оказывается, что

в трубках диаметром	2.96 мм	1.83 мм
при температуре 0°	$e = 0.6$	0.3
„ „ 100°	$e = 0.000\,009$	0.00016

Существование неподвижного слоя допускал и Гаген,[2] считая его толщиною в 0.013 мм, но, как увидим ниже (§ 45), это предположение не может быть допущено.

27. Опыты Жирара, несмотря на некоторую недостаточность полноты наблюдений, все-таки дали [уравнение (I)] один несомненный и чрезвычайно важный результат: они показали, противно предположению Кулона (см. § 21), что сопротивление жидкости выражается формулою, пропорциональною первой степени скорости не только при скоростях 0.001 м или 0.2, или 0.3, но и при скоростях гораздо бо́льших, когда они доходили до 0.687.[3] Уравнение (I) оставалось справедливым еще и при этой скорости. Этим самым опыты Жирара показали, что если другие наблюдатели, изучая движение воды в трубах большого диаметра при подобных же скоростях и даже при

---

[1] Mém. l'Inst. de France, 1813, 1814, 1815, p. 276.
[2] Kgl. Akad. Wissensch., Berlin, 1854, S. 55.
[3] Mém. l'Inst. de France, 1813, 1814, 1815, Tabl. VII.

скоростях меньших, должны были считать, что сопротивление выражается формулою вида

$$av^2 + bv,$$

то это произошло потому, что движение воды во время их опытов совершалось не так, как в трубках малого диаметра. Если в трубках малого диаметра и достаточно большой длины движение близко к прямолинейному, как и предполагалось при выводе уравнения (I), то в трубах больших диаметров движение воды уже нельзя считать мало отличающимся от прямолинейного и что уравнение (I) к этим трубам совсем не применимо, и член $av^2 + bv$ не выражает уже в сущности силы сопротивления. При этих сложных движениях он есть результат и силы липкости, или трения, и тех излишних длин путей, которые проходят частицы жидкости, двигаясь, взамен прямых, по разнообразным кривым путям. Эти опыты побудили, таким образом, снова возвратиться к гипотезе Ньютона.

28. Как, однако, ни замечательны были для своего времени опыты Жирара, они тем не менее не разрешили вопросов, поставленных самим Жираром. Он знал, что в трубке внутренние струи двигаются быстрее наружных, что это есть результат сцепления частиц жидкости с твердым телом — трубкою — и взаимного прилипания частиц жидкости, что для определения коэффициента b надо знать не среднюю скорость движения воды, а те относительные скорости, которые проявляются в текущей струе, и тем не менее в его формуле заключается, как и у его предшественников, одна средняя скорость. Правда, Жирар нарочно взял трубки малого диаметра, чтобы разница между скоростями была по возможности мала; но эта цель не была достигнута, ибо при средней скорости 0.687 м наибольшая разница между скоростями была, вероятно, около 1.36 м. Если обратим еще внимание на то обстоятельство, что эта очень

большая разница соответствовала струям, удаленным одна от другой менее чем на 1.5 мм, то, конечно, придется сказать, что, вероятно, и относительные скорости были не малы.

Нет возможности допустить, чтобы Жирар не понимал недостатка своих знаний и наблюдений для правильного определения величины коэффициента b, который и в его глазах, как и в глазах Кулона, должен был зависеть от взаимного сцепления или прилипания частиц жидкости, обнаруживающего свое влияние только при относительном движении струй. Он знал, что, наблюдая вытекание воды из трубок, нельзя определить силу сцепления ее до тех пор, пока остается неопределенным закон относительных движений для всех частей струи; и его знание вполне обнаруживается в его словах, когда он говорит,[1] что физики и математики, следуя Ньютону, считали, что жидкости суть тела, частицы которых уступают *всякой* силе, какова бы она ни была, и легко двигаются одна относительно другой под влиянием этой силы, и затем,[2] что, когда масса жидкости находится в движении, ее частицы не имеют одного и того же общего движения, а, скользя одна по другой, должны отчасти преодолевать сцепление, действующее между ними; *следовательно, надо знать величину и образ действия этого сцепления, чтобы ввести его в вопросы гидродинамики, без чего будут получены только неточные решения.*

Этого последнего знания Жирару недоставало, и он не в силах был определить сцепление частиц воды.

29. Относительное движение частиц воды можно найти одним из двух способов: надо или определить его наблюдением, или суметь указать если не величину, то характеристику сил сцепления и всех других сил, действующих на частицы жидкости, и затем из общих уравнений гидродинамики найти закон

[1] Mém. l'Inst. de France, 1813, 1814, 1815, p. 314.
[2] Id., p. 315.

относительных движений. Что касается наблюдений над двигающеюся водою, предпринимавшихся с целью найти закон ее движения, то они представляли и представляют огромные трудности.

Галилей говорил,[1] что открытие законов движения небесных тел, несмотря на неизмеримость расстояний их от нас, представляло ему меньше затруднений, чем изыскания над движением текущей воды, хотя это движение и совершается подле нас.

Различие скоростей в разных частях большой струи воды до Жирара наблюдали многие (Мариотт, Пито, Кастелли, Мичелотти, Вольтман и многие другие), но все их опыты, произведенные в реках или каналах, где вода двигалась далеко не в тех же условиях, как в тонких и длинных трубках Жирара, не могли дать ему точного указания на закон относительного движения струй, им наблюдавшихся, тем более что результаты наблюдений его предшественников весьма мало согласовались между собой; Эйтельвейн, говоря[2] по поводу этих опытов, прямо высказывает, что из всех них нельзя еще сделать никакого общего заключения. Приведенные обстоятельства достаточно показывают всю невозможность для Жирара вывести недостававший ему закон относительного движения струй из тех опытов, которые были сделаны до него.

Теоретическим путем из уравнений гидродинамики он не мог достигнуть этой цели, так как величайшие математики, бывшие его современниками, Лагранж и Лаплас, останавливались на уравнениях Эйлера, где вовсе не вводится сила сцепления жидкости.

Недостаток теоретических исследований заставляет и нас пока воздержаться от окончательного обсуждения, насколько

---

[1] *Ruhlman*. Hydromechanik. II Aufl., 1880, S. 333.

[2] *Eytelwein*. Handb. d. Mechanik fester Körper und der Hydraulik. II Aufl., S. 171.

же опыты Жирара подтверждают или опровергают гипотезу Ньютона. Этот недостаток будет восполнен (см. § 45), как только мы ознакомимся с теоретическими исследованиями Навье, сделавшего в этом отношении первый шаг.[1]

30. Решение Навье по необходимости должно было основываться на гипотезе относительно свойства или характеристики сил сцепления в жидкости. Он рассматривал жидкость несжимаемою, в которой частицы могут двигаться почти свободно одна относительно другой, и допустил, что отталкивание частиц изменяется пропорционально скорости сближения или удаления частиц между собою.[2]

Исходя из этих предположений, Навье нашел дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка, определяющие движение различных частиц жидкости, и делая еще некоторые предположения относительно формы движения, вывел из своих уравнений конечные результаты для нескольких частных случаев. Между вопросами, получившими в мемуаре Навье окончательное решение, находится и вопрос об установившемся движении воды в горизонтально положенной тонкой, круглой трубке.[3]

31. Общие уравнения Навье были потом найдены и другими учеными весьма различными путями.[4] Для целей этой статьи нет, однако, необходимости останавливаться на общих уравнениях Навье. Скольжение в струе воды при установившемся ее движении в тонкой, горизонтально положенной круглой трубке может быть найдено гораздо проще, если только все те гипотезы, которые нужны для интегрирования уравнений

[1] Mém. l'Inst. de France, t. VI, 1822.

[2] Id., p. 391.

[3] Id., p. 41.

[4] *Poisson*. Journ. l'École Polytechn., cah. XX; *Bresse*. Cours de mécanique appliquée. 1868, p. 31 et 32.

Навье, в данном частном случае допустимы при самом составлении дифференциальных уравнений. Результаты, таким образом получаемые, нисколько не отличаются от результатов Навье; а между тем цель достигается гораздо проще и легче. Итак, при выводе уравнения движения воды в горизонтально положенной тонкой, круглой трубке при установившихся обстоятельствах примем следующие предположения:

1) Все частицы жидкости двигаются по прямым линиям, параллельным с осью трубы.

2) Для всех частиц жидкости, одинаково удаленных от оси трубы и расположенных в одном и том же поперечном сечении трубы, все условия движения будут совершенно одинаковы. Другими словами, все частицы жидкости, образующие бесконечно тонкое круглое кольцо, концентрическое с осью, должны двигаться с одинаковыми скоростями. Частицы, составляющие другое кольцо, концентрическое с первым, но меньшего диаметра, будут иметь свою, общую для всех них, величину скорости, но только эта величина не будет одинакова с предыдущею. Все кольца одинаковых диаметров, двигаясь с равными скоростями, образуют как бы цилиндрические слои. Цилиндрические слои меньших радиусов двигаются с бо́льшими скоростями, чем слои с бо́льшими радиусами. Наибольшая скорость проявляется на оси трубы, наименьшая — у стенок ее. Это движение разных концентрических слоев жидкости часто сравнивают для наглядности объяснения с движением трубок, составляющих телескопную трубу, при ее раздвигании.

Постепенное увеличение скорости частиц жидкости по мере уменьшения расстояния, отделяющего тот или другой слой от оси, замечалось давно и многими;[1] но Дюкло[2] показал

---

[1] Между прочим, Стефан заметил, что частицы жидкости располагаются по параболоиду, Wiener Sitzberichte, 1861.

[2] *Ducleaux.* Ecoulement de divers liquides au travers des éxpaces capillaires. Ann. de chemie et de phys., t. XXV, 1872.

это очень простым опытом. Шарик и небольшую часть термометрической трубки он наполнял окрашенным спиртом, затем наливал в трубку спирт неокрашенный. Поверхность, разделяющая спирт окрашенный от спирта неокрашенного, оказывается плоскою. При нагревании шарика на лампе окрашенный спирт начинает двигаться по термометрической трубке вверх, перемещая вместе с тем и спирт неокрашенный. По мере перемещения жидкостей поверхность их раздела теряет свою плоскую форму и становится выпуклою посредине вверх.

3) Гидродинамическое давление во всех точках какого-нибудь поперечного сечения трубы имеет одну и ту же величину. В сущности это предположение есть прямой и необходимый результат первого предположения, допускающего, что все частицы жидкости двигаются по прямым линиям, параллельным оси. Его можно доказать строго, если только написать все уравнения Навье. Доказательство можно найти, например, у Кирхгофа.[1]

Здесь принято это как предположение с тою единственною целью, чтобы сделать вывод необходимого уравнения по возможности простым.

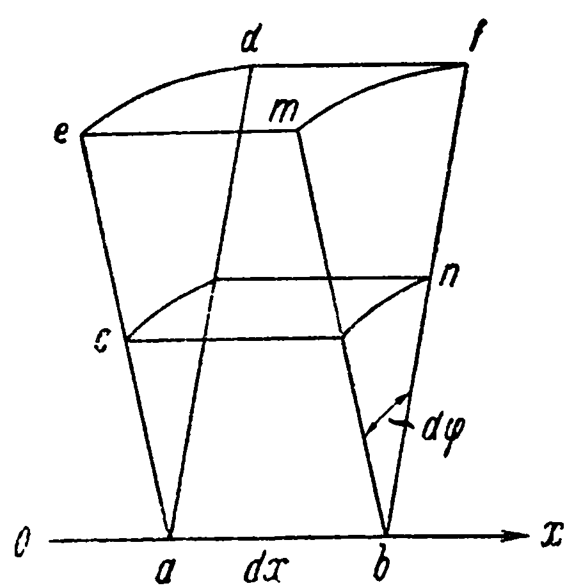
4) Каждый цилиндрический слой жидкости задерживается жидкостью, прилегающею к нему снаружи, и увлекается вперед жидкостью, прилегающею к нему с внутренней стороны, и относительно этих задерживающих и увлекающих сил справедлива гипотеза Ньютона, т. е. что эти силы пропорциональны поверхностям, на которых развиваются, прямо пропорциональны относительным скоростям одного слоя относительно другого, с ним смежного, и не зависят от давления, которому подвергается жидкость.

---

[1] Dr. *Gustav Kirchhoff*. Vorlesungen über math. Phys., 1876, 26 Vorlesung.

32. На основании этих предположений можно без больших затруднений найти уравнение, определяющее скорость прямолинейного движения какой угодно частицы жидкости, двигающейся в тонкой трубке.

Чтобы найти это уравнение, представим себе, что, как на фиг. 1, струя жидкости рассечена двумя бесконечно близкими одна к другой плоскостями, перпендикулярными к оси трубки, проходящими через точки a и b; затем, что в слое жидкости, заключающемся между этими плоскостями, выделено кольцо, ограниченное цилиндрическими поверхностями с осью ab, совпадающею с осью трубки (внутренняя из этих поверхностей описана радиусом $r = ac$ и наружная — радиусом $r + dr = ae$), наконец, из кольца вырезана часть двумя плоскостями df и be, проходящими через ось ab и образующими между собою бесконечно малый угол $d\varphi$.



Фиг. 1

Каждый элемент жидкости, подобный только что описанному, двигается параллельно оси трубы с постоянною скоростью; следовательно, все внешние силы, действующие на него, взаимно уравновешиваются и сумма проекций всех сил, действующих на элемент, взятых на направление оси трубы, должна быть равна нулю.

Ось трубы примем за ось x и обозначим

$$Oa = x \quad \text{и} \quad ab = dx.$$

Что касается сил, действующих на элемент, то этот элемент будет подвергаться гидродинамическому давлению на всех своих сторонах, и во время движения на его поверхностях будут развиваться силы липкости или трения по направлениям, параллельным тем поверхностям, на которых они будут раз-

виваться. Гидродинамическое давление на единицу площади, действующее на частицы, находящиеся в плоскости *aed* назовем p. В таком случае гидродинамическое давление на поверхность элемента жидкости *cd*, величина которого выражается произведением

$$rdrd\varphi,$$

будет

$$prdrd\varphi. \tag{A}$$

Его направление будет от *a* к *b*, которое мы примем за направление движения и будем считать положительным.

Гидродинамическое давление на единицу площади, соответствующее плоскости *lmn*, удаленной на расстояние dx от плоскости *aed*, выраженное в зависимости от x с точностью до бесконечно малых величин первого порядка, будет

$$p + \frac{dp}{dx}dx;$$

а на элемент *mn*, величина которого опять $rdrd\varphi$, давление, направленное от *b* к *a*, будет

$$-\left(p + \frac{dp}{dx}dx\right) rdrd\varphi. \tag{B}$$

По направлению оси x на тот же элемент будут действовать еще те силы, которые разовьются на поверхностях *cm*, *fn*, *cn* и *mf*.

Первыми двумя из этих поверхностей рассматриваемый элемент отделяется от остальной части всего выделенного нами кольца; так как элемент относительно кольца не двигается, то не только нет относительного движения соприкасающихся частей жидкости вдоль этих элементов, но и вся поверхность *cm* сохраняет свое положение относительно поверхности *fn*. Отсюда следует, что на поверхностях *cm* и *fn* не развивается сил, им параллельных.

Нельзя того же сказать о поверхностях cn и mf; напротив, они во время перемещения жидкого элемента не сохраняют своего относительного положения; скорость в точке c не равна скорости в точке e.

Если назовем u скорость в точке c, удалённой от оси на длину радиуса r, то в точке e, расстояние которой от оси равно $r+dr$, скорость будет отличаться от u на некоторую величину, состоящую из суммы бесконечно малых разных порядков, а если ограничимся точностью не выше первого порядка, то для точки e формула

$$u+\frac{du}{dr}dr$$

выразит величину скорости.

Это изменение скоростей производится силами сцепления или трения жидкости.

Чем больше будут силы, действующие на поверхностях элемента жидкости, тем больше будут они изменять его вид; а изменение вида прямо пропорционально относительной скорости поверхностей cn и fm и обратно пропорционально расстоянию между этими поверхностями, равному dr. Следовательно, сила трения на поверхности cn будет возрастать прямо пропорционально $\frac{du}{dr}dr$ и обратно пропорционально dr.

Это значит, что сила трения на поверхности cn, удаленной от оси трубы на величину r, где скорость движения жидкости есть u, будет пропорциональна отношению

$$\frac{\frac{du}{dr}dr}{dr}=\frac{du}{dr}. \qquad (C)$$

Так понимается теперь гипотеза Ньютона о пропорциональности силы трения и относительной скорости.

Если в какой-нибудь точке жидкости, удаленной от оси на расстояние r, сила трения пропорциональна du/dr, то в точках,

находящихся на других расстояниях от оси, сила трения будет пропорциональна другим величинам. Известно, что если бы хотели определить эту другую величину для расстояния, равного

$$r + dr,$$

и считали бы достаточным остановиться на бесконечно малых величинах первого порядка, то нашли бы

$$\frac{du}{dr} + \frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr}\right) dr. \qquad (D)$$

Теперь для определения величины сил трения, развивающихся на поверхностях cn и fm, достаточно помножить выражения $[C]$ и $[D]$ на величины соответствующих площадок и на ту величину силы трения жидкости, которую она имела бы при относительной скорости, равной единице, и при величине поверхности в одну квадратную единицу. Пусть μ выражает эту величину силы трения при относительной скорости, равной единице, и на поверхности в одну квадратную единицу.

Очевидно, что величина поверхности cn есть

$$r d\varphi dx$$

и величина поверхности fm есть

$$(r + dr) d\varphi dx.$$

Приведенные формулы дают все необходимое, чтобы написать, что сила прилипания или трения, действующая вдоль поверхности cn, есть

$$\mu \frac{du}{dr} r d\varphi dx \qquad (E)$$

и вдоль поверхности fm есть

$$\mu \left[\frac{du}{dr} + \frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr}\right) dr\right](r + dr) d\varphi dx. \qquad (F)$$

Во время движения жидкости по трубке слои, лежащие к оси ближе, чем рассматриваемый нами элемент, будут увлекать его, т. е. прикладывать к нему силу в направлении от a к b в положительном направлении; следовательно, сила, приложенная к элементу cn, должна выражаться числом положительным. Напротив, ввиду того что слои, лежащие от оси далее, чем рассматриваемый элемент, будут задерживать его, сила, приложенная к поверхности fm, должна быть приложена в сторону от b к a и выражаться числом отрицательным. Абсолютные величины этих чисел уже выражены формулами (E) для первого и (F) для второго. В формуле (E) величины μ, r, $d\varphi$, dx суть величины положительные, а относительно скорости принято, что она уменьшается при всех увеличениях r, следовательно du/dr есть величина отрицательная при всех значениях r.

Отсюда вытекает, что формулы (E) и (F) дают числа отрицательные, и, следовательно, сила, действующая на поверхности fm, прямо выражается формулою (F), а для выражения силы, приложенной к поверхности cn, надо перед формулою (E) поставить знак минус.

Таким образом найдено, что параллельно оси трубы на элемент жидкости cn (фиг. 1) действуют силы

$$prd\varphi dr, \qquad -\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)rd\varphi dr,$$

$$-\mu\frac{du}{dr}rd\varphi dx, \qquad \mu\left[\frac{du}{dr}+\frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr}\right)dr\right](r+dr)d\varphi dx.$$

Все эти силы, как выше было сказано (вследствие равномерности движения), должны составить сумму, равную нулю. Следовательно, получается уравнение

$$prd\varphi dr-\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)rd\varphi dr-\mu\frac{du}{dr}rd\varphi dx+$$

$$+\mu\left[\frac{du}{dr}+\frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr}\right)dr\right](r+dr)d\varphi dx=0.$$

Сокращая в этом уравнении подобные члены, сохранив члены только второго порядка, получим

$$-\frac{dp}{dx} r dx d\varphi dr + \mu \left[\frac{du}{dr} + r \frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr}\right)\right] dx\, d\varphi\, dr = 0.$$

Общий множитель

$$dx\, d\varphi\, dr,$$

ни в каком случае не равный нулю, может быть сокращен, и, сверх того, нетрудно заметить, что

$$\frac{du}{dr} + r \frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr}\right) = \frac{d\left(r \frac{du}{dr} + C\right)}{dr}.$$

Стало быть, предыдущее уравнение обратится в

$$r \frac{dp}{dx} = \mu \frac{d\left(r \frac{du}{dr} + C\right)}{dr}. \tag{1}$$

Относительно гидродинамического давления было уже сказано (см. § 31, п. 3), что оно не зависит от r, а зависимость его от x, на основании многих, не подлежащих сомнению опытов, может быть представлена уравнением

$$p = A - Bx,$$

где A и B суть величины постоянные.

Принимая это в расчет, уравнение (1) преобразуется в

$$B r dr = -\mu d\left(r \frac{du}{dr} + C\right).$$

Интегрирование этого уравнения в пределах от $r=0$ до $r=r$ и в предположении, что μ есть величина постоянная, доставит

$$\frac{Br^2}{2} = \mu\left(r \frac{du}{dr}\right)_{r=0} - \mu\left(r \frac{du}{dr}\right)_{r=r}.$$

Так как du/dr при $r=0$ не обращается в бесконечность, то первый член второй части равенства в последнем уравнении обращается в нуль и остается

$$\frac{du}{dr} = -\frac{B}{2\mu} r. \tag{2}$$

Это уравнение уже определяет величины относительных скоростей du/dr в зависимости от изменения гидродинамического давления, от радиуса и внутреннего трения жидкости при относительной скорости, равной единице, приходящегося на квадратную единицу площади. Но этим уравнением нельзя еще воспользоваться ни для определения величины μ, ни для проверки гипотезы Ньютона.

Если скорости, соответствующие $r = 0$ и $r = r$, назовем u_0 и u, то интегрирование уравнения (2) доставит

$$u = u_0 - \frac{B}{4\mu} r^2. \tag{3}$$

Величина входящего здесь u_0 определится из условий, которые должны быть выполнены на границах жидкости, на ее поверхности прикосновения с трубкою.

Если бы элемент жидкости en (фиг. 1) поверхностью fm соприкасался с трубкою, у которой внутренний радиус был бы ρ, то его поверхности cd и mn имели бы величину

$$\rho d\varphi dr,$$

поверхность cn имела бы величину

$$(\rho - dr) d\varphi dx,$$

а поверхность fm — величину

$$\rho d\varphi dx.$$

Силы, приложенные к поверхностям cd и mn, были бы

$$p\rho d\varphi dr \quad \text{и} \quad -\left(p+\frac{dp}{dx}\right)\rho d\varphi dr.$$

Сила, действующая на поверхность cn, определится из формулы (E), если только в ней на место r подставим $(\rho - dr)$; следовательно, припоминая сказанное о направлении силы, приложенной к поверхности cn, найдем

$$-\mu\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\rho}(\rho-dr)\,d\varphi dx:$$

а для определения силы, которая будет действовать на поверхности fm, надо будет умножить скорость движения воды вдоль стенки трубы, которую обозначим U_ρ, на коэффициент трения жидкости о стенку. Назовем λ [1] * силу трения жидкости о стенку трубы при скорости, равной единице, когда поверхность прикосновения между водою и трубкой равна единице.

В таком случае, обращая внимание на то, что направление силы трения, приложенной к элементу жидкости со стороны стенки, будет в сторону, противоположную движению, найдем

$$-\lambda U_\rho \rho d\varphi dx.$$

Все только что написанные четыре силы взаимно уравновешиваются при равномерном движении; следовательно

$$p\rho d\varphi dr-\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)\rho d\varphi dr-\mu\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\rho}(\rho-dr)\,d\varphi dx-$$

$$-\lambda U_\rho \rho d\varphi dx=0,$$

* Ссылки в квадратных скобках указывают номер примечания (см. стр. 540—541) (*Ред.*).

а отсюда несокращающиеся члены второго порядка дают

$$-\mu\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\rho}-\lambda U_\rho=0,$$

откуда

$$U_\rho=-\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\rho}.$$

Если теперь в уравнении (3), взамен r, вставим ρ и потом на место первой его части вставим вторую часть последнего уравнения, то найдем

$$-\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\rho}=u_0-\frac{B}{4\mu}\rho^2,$$

и, наконец, так как из уравнения (2)

$$\left(\frac{du}{dr}\right)_{r=\rho}=-\frac{B}{2\mu}\rho,$$

то

$$v_0=\frac{B}{4\mu}\left[\rho+\frac{2\mu}{\lambda}\right]\rho.$$

Следовательно, взамен уравнения (3), можно написать

$$u=\frac{B}{4\mu}\left[\rho^2+\frac{2\mu}{\lambda}\rho-r^2\right]. \qquad (4)$$

Это и есть уравнение, выражающее скорость движения жидкости в какой угодно точке внутри трубы, выведенное на основании гипотезы Ньютона; но так как скорости в разных точках жидкости нет возможности наблюдать, то и этим уравнением нельзя еще воспользоваться для определения неизвестных коэффициентов μ и λ; уравнение надо еще преобразовать.

33. С этой целью можно определить количество воды, которое должно протечь в данное время, если бы последнее урав-

нение было верно, и потом сравнить вычисление объема с объемами, определенными по наблюдениям.

Объем протекающей воды на основании уравнения (4) определяется легко. Описав в поперечном сечении трубки два круга радиусами r и $r+dr$, получим кольцо, у которого площадь будет

$$2\pi r dr.$$

Так как все точки этого кольца одинаково удалены от оси трубы, то во всех его точках жидкость будет двигаться с одною и тою же скоростью, и если назовем ее u, то объем воды, протекающей через избранное кольцо в течение единицы времени, будет

$$2\pi r u dr,$$

а через все поперечное сечение трубки протечет, очевидно,

$$2\pi \int_0^\rho r u dr.$$

Называя этот объем Q и подставив под знаком интеграла, вместо u, вторую часть уравнения (4), тотчас же найдем

$$Q = \frac{\pi}{8} \frac{B\rho^4}{\mu} \left[1 + \frac{4\mu}{\lambda\rho}\right]. \tag{5}$$

Это уравнение можно уже прямо сравнивать с опытами; но полезно иметь еще выражение средней скорости течения жидкости. Назовем v среднюю скорость вытекания, которая определяется из уравнения

$$\pi\rho^2 v = Q.$$

Зависимость средней скорости v от сил сцепления или трения на основании двух последних уравнений определится следующим уравнением:

$$v = \frac{\pi}{8} \frac{B\rho^2}{\mu} \left[1 + \frac{4\mu}{\lambda\rho}\right]. \tag{6}$$

Уравнения (5) и (6) относительно μ и λ равнозначащи, и потому их нельзя рассматривать как бы два отдельные, независимые и способные доставить возможность на основании этого опыта определить и μ и λ. Но если употреблять во время опытов трубки разных диаметров, то каждое из этих уравнений может послужить для определения величины обоих неизвестных коэффициентов μ и λ.

Само собою разумеется, что определение будет только тогда верно, если удастся так организовать и произвести опыты, что при них будут выполнены все те предположения, которые были приняты при выводе уравнения (4).

Эти же уравнения могут послужить и для другой, более важной цели: ими можно воспользоваться для проверки правильности самой гипотезы Ньютона.

34. Действительно, если гипотеза Ньютона верно представляет закон действия сил трения жидкости, то какой бы величины ни достигали эти силы в том или другом частном случае, уравнение (5) всегда верно определит количество вытекающей жидкости. Если же силы, соответствующие гипотезе Ньютона, суть силы воображаемые, не проявляющиеся в природе, то результат их действия может совпадать с результатом действия истинных сил только в некоторых частных случаях. Так, например, произведя два опыта с трубками разных радиусов ρ или с одною и тою же трубкой, но при разных разностях давлений в начале и конце трубки, от которых зависит величина B, можно будет определить соответствующие количества протекшей воды, а вставив две найденные величины Q в уравнение (5), получим два разных уравнения, из которых можно будет определить величины μ и λ. Пользуясь этими коэффициентами и определяя силы трения жидкости на основании гипотезы Ньютона, мы можем определить количество жидкости, которое протечет через трубку в этих двух испытанных случаях; очевидно, что такое вычисление приведет нас к тому же результату,

к которому привел опыт, и, следовательно, результат действия сил воображаемых будет одинаков с результатом действия сил, на самом деле существующих в природе. Но в других частных случаях, когда изменившиеся обстоятельства изменят напряжение действительных сил совершенно иначе, чем предполагает гипотеза Ньютона, результаты действия двух систем сил, одной — воображаемой и другой — истинной, не будут уже совпадать, и количество жидкости, действительно вытекающей, не будет одинаково с количеством жидкости, определенной уравнением (5), в котором на месте μ и λ стоят два выше определенных числа.

Итак, если при разнообразных опытах, способных вызывать чрезвычайно разнообразные напряжения сил, действующих на жидкость, результаты опытов будут постоянно совпадать с результатами формулы (5), то это укажет, что все условия, при которых было выведено уравнение (4), вполне осуществляются и при опытах; а так как одно из существеннейших обстоятельств при выводе было определено гипотезою Ньютона, то, стало быть, такое постоянное совпадение результатов наблюдений и результатов уравнения (5) послужит подтверждением правильности гипотезы Ньютона; напротив, несогласие опытов с формулами ясно покажет неправильность гипотезы Ньютона.

Таким образом, оказывается, что при оценке правильности гипотезы Ньютона уравнение (5) может служить одним из надежнейших критериев. Поэтому оно заслуживает самого внимательного сличения с опытами.

35. Приступая к этому сличению, надо твердо помнить, что при выводе уравнения было сделано не одно, а несколько предположений и что только те опыты годятся для сличения, в которых осуществляются все без исключения предположения; что достаточно не выполнить какое-нибудь одно предположение, чтобы опыт потерял всякое значение при разборе.

Обратимся же теперь к исследованию, при каких обстоятельствах осуществляются те предположения, которые были сделаны при выводе уравнений, относящихся к движению воды в трубках. Это исследование может быть сделано только путем изучения сделанных уже различных опытов.

36. По поводу первого предположения (см. § 31, п. 1) можно сказать, что прямолинейное движение частиц воды по линиям, параллельным с осью, было прямо наблюдаемо.

Людвиг[1] заметил, что при достаточной длине трубки примешанные к жидкости видимые частицы двигаются прямолинейно и параллельно оси трубы, а Гаген говорит,[2] что, наблюдая движение воды в стеклянных трубках (из которых наиболее широкая имела внутренний диаметр 2.7 рейнской линии, или 6.12 мм), можно убедиться, что при небольших давлениях и невысоких температурах вода как бы разлагается на чрезвычайно тонкие цилиндрические слои, двигающиеся один внутри другого параллельно оси трубы. Это явление легко наблюдается, если пропускать через трубку мелкие тела одинакового с водою веса, например опилки темного янтаря. Очень характерный признак этого явления состоит в том, что когда вода вытекает в атмосферу и двигается настолько быстро, что капиллярное притяжение краев выпускного отверстия не изменяет формы струи, то струя имеет совершенно прозрачную, гладкую поверхность.

При движении под большим давлением или при высокой температуре тотчас замечается, что легкие тела, увлекаемые водою по трубке, следуют за довольно сильными вихревыми движениями то в том, то в другом направлении и показывают, что частицы воды, кроме поступательного движения, присущего

---

[1] *Ludwig.* Lehrb. d. Physiol., Bd. 2, S. 57, Zweite Auflage.

[2] *Hagen.* Abhandl. d. Kgl. Akad. Wissensch., Berlin, 1869 (Berlin 1870), S. 1 u. 2.

всей массе воды, имеют еще внутри нее беспрерывные относительные перемещения. В это время мелкие волны, появляющиеся на поверхности вытекающей струи, сообщают ей беловатый вид матового стекла.[1]

В трубках больших поперечных сечений, как давно уже замечал Сен-Венан[2] и, заметим, как прекрасно описал Буссинеск,[3] струи жидкости не двигаются параллельно одна другой и не имеют скоростей, изменяющихся с правильною постепенностью; напротив, разрывы жидкости, водовороты и другие косые движения, сильно влияющие на величину трения (лучше бы сказать, на величину работы трения, ибо искривление путей увеличивает длину путей, проходимых точками), образуются и развиваются тем значительнее, чем больше сечение двигающейся струи. Отсюда прежде всего вытекает то заключение, что первое предположение далеко не всегда выполняется и, следовательно, далеко не все опыты над движением воды в трубках могут годиться для проверки гипотезы Ньютона.

Могут годиться только те опыты, которые были сделаны над трубками большой длины и малого диаметра (капиллярными), притом при небольших давлениях и при невысоких температурах.

---

[1] По поводу этих признаков Якобсон замечает, что не считает их характерными. Он говорит, что не раз видел вытекание воды совершенно прозрачною струей, хотя условия закона Пуазейля вовсе не исполнялись. Это замечание Якобсона следует иметь в виду, в особенности при производстве опытов по способу Пуазейля, чтобы так вести опыты, чтобы была возможность убедиться в действительности существования условий, при которых закон Пуазейля правильно применяется не по виду струи, а по сравнению результатов измерений, сделанных над размерами трубок, высотами давлений и весом протекающей жидкости.

[2] *De Saint-Venant.* Formules et tables nouvelles. Ann. d. mines, 4 sér., t. XX, 1851, p. 49.

[3] *Boussinesq.* Essai sur la théorie des eaux courantes, § 1 et 2.

37. Что касается второго предположения (§ 31, п. 2), допускающего, что вода двигается подобно выдвигаемой телескопической трубе, как бы разлагаясь на цилиндрические слои бесконечно малой толщины, то правильность этого предположения подтверждается прямыми наблюдениями Гагена, как только что было упомянуто (§ 36), и выполняется оно при исполнении тех же условий, которые были приведены по поводу первого предположения.

38. Что же касается третьего предположения (§ 31, п. 3), касающегося постоянства гидродинамического давления в каждом поперечном сечении трубки, то, как уже было сказано, оно в сущности есть прямой и необходимый результат первого предположения и, следовательно, выполняется вместе с первым.

39. Четвертое предположение есть сама, подлежащая теперь поверке, гипотеза Ньютона.

40. Во время вывода уравнения (4) было сделано еще предположение, что

$$p = A - Bx.$$

Останавливаясь на этом допущении, надо сказать, что, не говоря об опытах Дарси, в которых наблюдение всего трех бывших пиезометров подтверждало приведенное уравнение, опыты Лампе, несравненно более обширные, дают тот же результат.

Для разъяснения, с какою именно степенью точности может быть принято это уравнение, надо обратиться к рассмотрению следующей таблицы Лампе,[1] в которой высоты столбов воды y, соответствующие давлениям, и длины трубы x между наблюдаемыми точками, выражены рейнскими футами.

---

[1] Der Zivilingenieur, Neue Folge, 19. B. 873, S. 101.

Таблица 1

$$y = 42.5913 + 0.016512x$$

Вероятные ошибки:[1] 0.0722 0.000064

Расстояния x	Величины y		Расстояния x	Величины y	
	наблюденные	вычисленные		наблюденные	вычисленные
373.06	48.75	49.14	1583.77	68.74	68.93
455.60	50.11	50.18	1632.12	69.54	69.67
687.37	53.94	53.85	1668.09	70.13	70.40
766.12	55.24	54.91	1974.17	75.19	75.13
883.34	57.18	56.88	2372.96	81.77	81.95
1262.93	63.44	63.29	2789.81	88.66	88.39
1313.40	64.28	64.05	2940.01	91.14	91.18
1409.14	65.86	65.85			

Величины A и B вычислены на основании этой таблицы по способу наименьших квадратов. Вероятная ошибка в величине вычисленного давления менее тысячных его долей.

41. Убедившись, что формула, выражающая гидродинамическое давление в зависимости от длины x, выбрана правильно, надо определить, какими величинами, наблюдаемыми при опыте, выражается величина B.

Называя p гидродинамическое давление в каком-нибудь сечении трубы, удаленном от ее начала на расстояние x, назовем это давление p_1, когда расстояние будет $x + l$. В таком случае

$$p = A - Bx, \qquad p_1 = A - B(x + l).$$

Отсюда

$$p_1 - p = Bl;$$

[1] Т. е. вероятные ошибки величины 42. 5913 будет 0.0722, а коэффициента у x—0.000064 (*Ред.*).

обозначая разность давлений в начале и в конце взятой части трубки

$$p_0 = p_1 - p,$$

найдем, что

$$B = \frac{p_0}{l}. \tag{7}$$

Подставляя это выражение в уравнения (5) и (6), получим

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{\pi p_0 \rho^4}{8\mu l}\left[1 + \frac{4\mu}{\lambda\rho}\right], \\ v &= \frac{p_0 \rho^2}{8\mu l}\left(1 + \frac{4\mu}{\lambda\rho}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Если же заметим, что давление на квадратную единицу поверхности может быть выражено произведением Δ — веса единицы объема жидкости данной температуры — на h — высоту столба жидкости, т. е. что

$$p_0 = \Delta h,$$

то очевидно, что уравнения (8) можно заменить следующими:

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{\pi \Delta h \rho^4}{8\mu l}\left(1 + \frac{4\mu}{\lambda\rho}\right), \\ v &= \frac{\Delta h \rho^2}{8\mu l}\left(1 + \frac{4\mu}{\lambda\rho}\right). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Гидродинамические давления в каких-нибудь поперечных давлениях трубки не везде одинаково легко наблюдаются, и, конечно, удобнее всего было бы брать их у концов трубки в тех сосудах, куда концы эти вставлены. Если бы это было возможно, то величина p_0 выразилась бы разностью давлений в тех сосудах, в которые вставлены концы на уровнях центров отверстий трубки. Так обыкновенно и считают; так считали Жирар, Пуазейль, Гаген, и против этого ничего не возражал

Гельмгольц в своей статье,[1] и так действительно очень часто можно делать, поступая правильно; но Якобсон заметил,[2] что иногда это и неверно. Опыты Якобсона показали, что в том конце трубки, где жидкость вступает в нее, на коротком протяжении трубки давление гораздо сильнее падает, чем в дальнейших частях трубки, что разница давлений в сосудах, куда вставлены концы трубки на уровнях центров ее отверстий, иногда может быть значительно больше того числа p_0, которое должно быть поставлено в уравнения (8). Ошибка в определении p_0 или соответствующей ему высоты h, входящих в уравнения (8) и (9), и есть, по объяснению Якобсона (§ 25), вероятное объяснение разницы результатов, полученных, с одной стороны, Жираром, а с другой — Пуазейлем и им самим.

42. В заключение исследования тех условий, при которых выполняются предположения, принятые при выводе уравнения (4), и его последствий (5), (6), (8) и (9), надо еще заметить, что было предположено, что μ не зависит от r. Относительно этого обстоятельства следует сказать, что еще в 1851 г. Сен-Венан[3] заметил, что если бы желательно было достигнуть согласия между теорией Навье и результатами наблюдений над протеканием воды в каналах и трубах, то надо было бы допустить, что μ увеличивается вместе с увеличением радиуса r. Это обстоятельство он приписывал, однако, не особым условиям действия частичных сил на поверхности и внутри жидкости, а другому, действительно гораздо более вероятному явлению, состоящему в том, что струи жидкости не двигаются параллельно одна другой и не имеют скоростей, изменяющихся с правильною

[1] Wissensch. Abh., Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten, Bd. I, S. 219—220.

[2] Dr. *Heinrich Jacobson*. Beiträge zur Termodynamik. Reicherts und Reymonds Archive, 1860, S. 99.

[3] Formules et tables nouvelles pour la solution des problèmes relatifs aux eaux courantes, 1851, p. 49.

постепенностью; что разрывы, водовороты и другие косые движения, сильно влияющие на величину трения, образуются и развиваются значительнее в больших сечениях, чем в малых.

С другой стороны, Плато, наблюдая размахи магнитной стрелки внутри жидкости, один раз — около ее поверхности и другой раз — на некотором довольно значительном расстоянии от поверхности, нашел, что времена одного размаха далеко не одинаковы и именно:

	В воде	Глицерине	Насыщ. растворе соды	Спирте	Скипидаре	Оливковом масле
На поверхности[1] / Внутри жидкости	$\frac{46}{24}$	$\frac{2160}{1170}$	$\frac{60}{46}$	$\frac{15}{35}$	$\frac{14}{34}$	$\frac{303}{795}$

Ясно, что при больших размерах трубы было неправильно предполагать независимость μ от r и что в воде при увеличении радиуса надо было считать, что μ уменьшается, т. е. как раз противоположно тому, чего требуют Сен-Венан и Буссинеск, вовсе не рассматривавшие частичных сил. В трубках чрезвычайно узких, вероятно, μ так мало изменяется, что этими изменениями можно пренебрегать, не нарушая тем даже еще довольно большой степени точности. По крайней мере, к этому заключению заставляет притти замечательное согласие формул (8) и (9), выведенных в предположении постоянства μ, с опытами Пуазейля (§ 51).

43. Итак, оказывается, что движение воды по трубкам очень малого диаметра и очень большой сравнительно с диаметром длины при небольших давлениях и при невысоких температурах может происходить с выполнением всех предположений, при которых были выведены уравнения (8), если толь-

[1] Берется отношение времен размаха (*Ред.*).

ко оставим пока в стороне гипотезу Ньютона. Эта же гипотеза или верна при всяком движении, или совсем неверна. Следовательно, сравнение результатов большого числа опытов описанного характера с формулами (5) или (8) должно привести к серьезному подкреплению гипотезы Ньютона или к отвержению ее.

44. Опыты с тонкими трубками большой длины сравнительно с диаметром были сделаны уже многими. Сюда относятся опыты Жирара, Пуазейля, нескольких французских академиков, проверявших опыты Пуазейля, Гагена и Якобсона. Все эти опыты одинаково показывают, что истечение воды через тонкие трубки следует иногда одному, иногда другому, сильно отличающемуся закону. Под влиянием первого закона, известного теперь под именем закона Пуазейля, или Гагена — Пуазейля, воды протекает больше, чем при прочих равных обстоятельствах. Течение воды, следуя закону Пуазейля, повидимому, совершается так, что удовлетворяются все предположения, принятые при выводе уравнений (5), (8) или (9).

Все вышеупомянутые опыты, исключая только опыты Жирара, доставляют результаты, почти тождественные с результатами, найденными Пуазейлем. Поэтому, кроме Жирара, необходимо и вполне достаточно остановиться на обширных и классически выполненных опытах Пуазейля.

Ввиду многочисленности и разнообразия опытов, подтверждающих опыты Пуазейля, не совсем согласные с ними опыты Жирара теряют некоторым образом свое значение, тем более что теперь трудно открыть, какая именно была причина этого различия.

Во всяком случае на опытах Жирара мы еще остановимся, чтобы показать, что они не опровергают заключений, вытекающих из сопоставления теоретических выводов, сделанных на основании гипотезы Ньютона, с результатами Пуазейля и Якобсона.

45. Опыты Жирара привели его, как уже было сказано в § 25, к уравнению (I), определяющему среднюю скорость v

$$v=\frac{hd}{4bl} \quad \text{или} \quad v=\frac{h}{2b}\cdot\frac{\rho}{l},$$

а уравнение (8) показывает, что

$$v=\frac{\Delta h p^2}{8\mu l}+\frac{\Delta h\rho}{2\lambda l}.$$

Сличая эти две формулы, выражающие одну и ту же величину средней скорости v, видим, что они совпадут, если только величина μ будет гораздо больше, чем λ, т. е. если внутреннее трение жидкости будет гораздо больше, чем наружное. Это предположение и действительно сделал Навье, [1] чтобы показать, что результаты его вычислений подтверждаются опытами Жирара; Навье получил, что

$$v=\frac{\Delta h\rho}{2\lambda l}.$$

Если бы это уравнение было правильно, то оно подтверждало бы сделанные выводы и гипотезу Ньютона и при его посредстве можно было бы определить коэффициент наружного трения λ.

Но надо сказать, что это уравнение неправильно. Его прежде всего не поддерживают опыты самого Жирара, заставившие его притти к заключению, что есть слой жидкости, плотно прилегающий к стенке трубки. Очевидно, что такое явление было бы невозможно, если бы только действительно прилипание жидкости к стенке было меньше, чем прилипание между слоями самой жидкости. Это уравнение опровергают и опыты Гагена и Дюкло, заставляющие принимать, что, напротив,

[1] Mém. l'Inst. de France, t. VI, p. 431.

величина μ не больше, а гораздо меньше, чем λ. Следовательно, кажущееся сначала согласие между выводами Навье и опытами Жирара при внимательном их сличении не подтверждает гипотезу Ньютона. Несмотря, однако, на это обстоятельство еще нельзя сказать, что опыты Жирара опровергают эту гипотезу.

46. Если бы формула, найденная Навье, а затем и многими другими, была выведена под условием верности *одной* только гипотезы Ньютона и никаких других предположений в себе не заключала, то несогласие формулы с опытом давало бы полнейшее право утверждать, что гипотеза неверна; но вывод уравнения (9) был получен, как уже известно, при многих других предположениях, и между прочим, что струи двигаются прямолинейно и параллельно с осью. Недостаточно строгое выполнение этого предположения может быть также причиною несогласия формулы с опытами; а между тем это предположение введено, как известно, не потому, чтобы его требовала гипотеза Ньютона, а только потому, что дифференциальные уравнения движения, найденные Навье, еще более сложные, чем уравнения гидродинамики Эйлера, не интегрируются в их общем виде. Для окончательного решения вопроса, хотя бы в каком-нибудь частном случае, Навье и ввел предположение, что движение частиц происходит по прямым линиям, параллельным с осью. Результат, полученный Навье, будет иметь значение для наблюдателей, если им удастся так установить опыт, как предполагает Навье, и не будет годиться, если опыт в таких условиях произвести не удастся. Дифференциальным же уравнениям Навье, основанным на гипотезе Ньютона, по всему вероятию, могут соответствовать движения весьма сложные и в различных случаях весьма разнообразные. Разнообразие в движениях воды, протекающей по тонким трубкам, было обнаружено всеми наблюдателями этого явления, начиная с Жирара. Все они утверждают, что движение воды

следует при одних обстоятельствах одному закону, а при других — другому. Каков бы, однако, ни был закон движения воды в трубе, нельзя допустить, чтобы сила трения, развивающаяся в жидкости, иногда выражалась одною функцией скорости, а иногда другою; чтобы гипотеза Ньютона была иногда верна, а иногда не верна; и если, как увидим далее, в некоторых случаях эта гипотеза вполне подтверждается, то и здесь причину различия между уравнением (8) и опытами Жирара надо искать в тех обстоятельствах, которые имеют возможность заставлять частицы воды отклоняться в своих движениях от прямолинейного направления. Итак, можно сказать, что если опыты Жирара не подтверждают гипотезу Ньютона, то они ее и не опровергают.

47. Новый и значительный шаг в исследовании движения воды в тонких трубках делает Пуазейль. [1] Этот медик приступил к своим опытам потому, что, как говорит он в своем вступлении, для успехов физиологии необходимо знать законы движения по трубкам, диаметр которых около 0.01 мм, и что хотя Дюбуа, Герстнер и Жирар наблюдали движение воды в трубках небольших диаметров, но эти диаметры были еще сравнительно очень велики;[2] что хотя Навье, вводя гипотезу относительно влияния частиц одна на другую, и получил аналитическим путем формулу, сходную с формулою Жирара, но, чтобы эта формула получила право на применение, надо, чтобы она была подтверждена опытами. Это желание Пуазейля было как нельзя более правильно. Выше было уже мною замечено (§ 45), что согласие формул Навье и Жирара является только при совершенно неправильном и противоречащем опыту предположении, будто сцепление между стенками трубок,

---

[1] *Poiseuille.* Recherches experimentales sur le mouvement des liquides. Mémoires, présentés par divers savants. Inst. Acad. Roy. d. Sci., t. IX, p. 433 et suiv.

[2] *Poiseuille.* Recherches..., p. 461—484.

испытанных Жираром, и водою меньше, нежели сцепление между частицами самой жидкости.

48. Пуазейль делал опыты над трубками очень малых диаметров, а именно: [1]

Название трубки	На одном конце взаимно перпендикулярные диаметры были равны (в мм)		На другом конце взаимно перпендикулярные диаметры были равны (в мм)	
E	0.0286	0.0296	0.02933	0.0300
D	0.04466	0.0460	0.04250	0.0445
C	0.0845	0.0845	0.0850	0.0860
B	0.1117	0.1135	0.1125	0.1145
A	0.1395	0.1415	0.1405	0.1430
F	0.6160	0.6932	0.6140	0.6900

49. Опыты, сделанные над этими трубками, прежде всего указывают, [2] подобно опытам Жирара, что:

1) Движение по трубкам совершается, следуя иногда одному, иногда другому закону; что один закон применяется к тем случаям, когда длина трубки l при известной температуре жидкости t достаточно велика сравнительно с диаметром d, и что при недостаточной длине l закон движения жидкости будет другим, резко отличающимся от первого. Предел отношения l/d для трубок разных диаметров, обусловливающий появление того или другого закона, не обнаруживается с достаточною ясностью; но можно сказать, что предел отношения l/d увеличивается при увеличении диаметра. При опытах Пуазейля эти пределы оказались [3]

---

[1] Id., p. 435.
[2] Id., p. 494.
[3] *Poiseuille.* Recherches..., p. 495 et suiv., § 80.

для трубки *E* 70		для трубки *B* 270	
,, ,, *D* 80		,, ,, *A* 180	
,, ,, *C* 120		,, ,, *F* 310	

2) Затем из опытов можно заключить, что количество жидкости Q, протекающей в единицу времени, прямо пропорционально давлению p и может быть выражено уравнением

$$Q = kp,$$

где k — величина постоянная для одной и той же трубки и при одной и той же температуре; но k есть функция диаметра d, длины трубки l и температуры протекающей жидкости t.

Степень правильности этого уравнения для одной и той же трубки при постоянной температуре видна из следующей таблицы,[1] вычисленной, принимая за основание опыт под № 2 табл. 2, т. е. в последнее уравнение на место Q и p были встав-

Таблица 2

Трубка K. Длина ее $l = 364.00$ мм, диаметр отверстия свободного конца $d = 0.1316$. Температура протекающей жидкости $t = 11°C$

№ опыта	Давление p, мм рт. ст.	Время вытекания 1 см³, сек.		Ср. скорость вытекания v, мм/сек
		наблюденное	вычисленное	
1	54.987	8590.00	8598.2	8.56
2	210.129	2250.00	2250.0	32.68
3	419.645	1120.75	1126.6	65.30
4	835.565	565.00	565.8	130.1
6	2338.37	197.50	202.1	372.3
7	3095.54	154.00	152.73	474.4
8	3856.94	123.00	122.80	597.7
9	4616.53	106.25	102.40	693.7
10	5376.53	88.25	87.93	832.7
11	6136.53	77.50	77.04	948.7

[1] *Poiseuille*. Recherches..., № 76.

лены величины, соответствующие опыту № 2, и из уравнения была определена величина k. Потом в уравнении была подставлена эта величина k; вставляя разные величины p, наблюдавшиеся в разных опытах, определяли вычислением соответствующие величины Q.

3) Величина k не изменяется, вытекает ли жидкость в атмосферу или в какой-нибудь сосуд с водою, находящейся под давлением более или менее значительным. В таких случаях не следует только упускать из виду, что p представляет разность давлений у двух концов трубки.

4) Изучение результатов, полученных из наблюдений, привело Пуазейля к убеждению, что коэффициент k увеличивается прямо пропорционально четвертой[1] степени диаметра трубки и обратно пропорционально ее длине, так что при постоянной температуре можно написать

$$k = k'' \frac{d^4}{l},$$

где k'' может зависеть только от температуры. Это уравнение вместе с предыдущим дает

$$k'' = \frac{Ql}{pd^4}.$$

Чтобы показать степень точности этого выражения, Пуазейль определил из своих опытов количества жидкости Q, протекавшие через каждую из трубок, приведенных в табл. 3, при длине трубок $l = 25$ мм под давлением 775 мм рт. столба, имеющего температуру 10° C; вставляя эти числа в только что приведенное уравнение, он определил величину k''. Величины эти приведены в следующей таблице.[2]

---

[1] Не так, как вышло бы из опытов Жирара на основании уравнения (1) § 25.

[2] *Poiseuille*, Recherches..., p. 520.

Таблица 3

Название трубки	Ср. диаметры трубок d, мм	Величины k
M	0.013949	2495.50
E	0.029380	2496.00
D	0.043738	2494.42
C	0.085492	2496.77
B	0.113400	2496.20
A	0.141600	2492.67
F	0.652170	2495.00

Отсюда Пуазейль выводит, что при температуре $t = 10°$ C средняя величина

$$k'' = 2495.224.$$

При сравнении средней величины k'' с действительно найденными, оказывается, что наибольшая величина k'', взятая в табл. 3, больше средней всего на 0.0006 абсолютной ее величины, а наименьшая — на 0.0010. Эти величины, можно сказать, не выходят за пределы вероятных ошибок, ибо размеры отверстия трубок хотя и измерялись с точностью до 0.001 доли их абсолютной величины, но так как отверстия были не круглы, то для определения d, написанного в таблице, принимали отверстие трубки за эллипс и вычисляли диаметр равномерного с этим эллипсом круга. Поэтому можно считать достаточно хорошо доказанным, что k'' есть действительно постоянная величина при постоянной температуре и что при $t = 10°$ C

$$Q = 2495.224 \frac{pd^4}{l},$$

где Q выражает число кубических миллиметров, протекающих в секунду; высота ртутного столба p, диаметр трубки d и длина l выражены в мм и относятся к температуре 0° C.

Если давление p будет выражаться числом миллиметров водяного столба при температуре тоже 0°С, то, так как удельный вес ртути есть 13.576981, выходит

$$Q = 183.783 \frac{pd^4}{l}.$$

Отсюда нетрудно вывести, что v, средняя скорость поступательного движения воды по трубке, выразится формулою

$$v = 3177.018 \frac{pd^2}{l}.$$

Величина этой скорости при наблюдениях над трубкою B, при $p = 775$ мм, при диаметре $d = 0.1134$ и $l = 25$, была

$$v = 1266.507,$$

а при наблюдении трубки M, имеющей диаметр $d = 0.0139499$, при $p = 775$ и $l = 25$,

$$v = 19.1657.$$

50. Зависимость k'' от температуры определена Пуазейлем, подобно Жирару, формулою второй степени температуры, именно: [1]

$$k'' = 1836.724\,[1 + 0.0336793\,t + 0.0002209936\,t^2],$$

а выражая p высотами столбов воды при 0° С,

$$Q = 135.282\,[1 + 0.0336793\,t + 0.0002209936\,t^2]\,\frac{pd^4}{l}. \qquad (10)$$

Правильность этого выражения подтверждается табл. 4, [2] где приведены результаты опытов над трубкою D, у которой

---

[1] *Poiseuille*. Recherches..., p. 531.

[2] Id, p. 533.

$d = 0.0440406$ и $l = 50.225$ мм, под давлением столба ртути высотою $p = 776$ мм.

Таблица 4

Температуры t °C	Количество воды Q, вытекавшей в 1 сек., мм³	
	по вычислению	по наблюдению
5	0.125324	0.125388
10	0.145072	0.145031
15	0.165998	0.165468
20	0.188105	0.188328
25	0.211391	0.211371
30	0 235856	0.236241
35	0.261501	0.262411
40	0.288326	0.289335
45.1	0.316903	0.316466

Приведенная таблица показывает, что эмпирические формулы Пуазейля весьма точно выражают законы движения воды в тонких трубках, когда частицы воды двигаются параллельно оси трубы.

Подобные же, чрезвычайно сходные результаты доставляют и опыты над трубкою A и над другими трубками.

51. Итак, на основании опытов Пуазейля следует принять, что количество протекающей воды

$$Q = k'' \frac{pd^4}{l}$$

и средняя скорость струи

$$v = \frac{4k''}{\pi} \frac{pd^2}{l}.$$

Если же заменить диаметр d величиною радиуса ρ, то

и
$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{16k''p\rho^4}{l}, \\ v &= \frac{16}{\pi} k''p\frac{\rho^2}{l}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Подобный же закон был найден Гагеном и особенно хорошо подтверждается наблюдениями Якобсона.[1]

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (9) (см. § 41) и припоминая, что в тех уравнениях высота столба жидкости выражалась буквою h, а в этих уравнениях Пуазейль назвал высоту столба буквою p, окажется, что

$$16k'' = \frac{\pi\Delta}{8\mu}\left(1 + \frac{4\mu}{\lambda\rho}\right).$$

Вторая часть этого равенства показывает, что k'' есть функция ρ; но табл. 3 обнаруживает, что с точностью до 0.001 величина k'' не зависит от радиуса, несмотря на то, что наибольший из приведенных диаметров, и именно диаметр трубки F, был 0.65217, а наименьший диаметр, и именно трубки M, был 0.013949, т. е. несмотря на то, что первый больше второго в 47 раз.

Если бы, однако, обозначая через k'' величину, соответствующую ρ, назвать k''_1 ту величину, которая будет соответствовать ρ_1, то на основании последнего уравнения можно было бы написать

$$16k''_1 = \frac{\pi\Delta}{8\mu}\left[1 + \frac{4\mu}{\lambda\rho_1}\right].$$

---

[1] *Reichardes* u. *Dubois*. Reymonds Archiv, 1850, S. 81.

Из этих двух уравнений легко найти, что

$$\frac{\lambda}{\mu}=\frac{4}{\rho}\left[\frac{\frac{\rho}{\rho_1}-1}{\frac{k''_1}{k''}-1}-1\right],$$

а из табл. 3 видно, что наибольшее отношение радиусов $\frac{\rho}{\rho_1}=47$; отношение между k''_1 и k'' не может быть более 1.001, следовательно

$$\frac{4\mu}{\lambda\rho}<\frac{1}{11\,500}<0.0001.$$

Отсюда понятно, что Пуазейль не мог определить зависимость k'' от радиуса ρ и что, желая пользоваться уравнениями (9), с тем чтобы не делать ошибки только больше 0.001, можно в них членом $4\mu/\lambda\rho$ пренебречь сравнительно с единицею и написать их в виде

$$Q=\frac{\pi\Delta h\rho^4}{8\mu l}$$

$$v=\frac{\Delta h\rho^2}{8\mu l}.$$

Эти уравнения вовсе не отличаются от уравнений Пуазейля.

Следовательно, опыты Пуазейля представляют законы истечения воды из тонких трубок совершенно такими же, какими они были найдены из вышеприведенных вычислений, основанных на предположениях, что гипотеза Ньютона относительно трения воды справедлива. Это совпадение результатов дает право сделать заключение, что и предположение, поставленное в основу вывода, тоже верно, по крайней мере оно верно в пределах точности наблюдений.

52. Приведенное подтверждение справедливости гипотезы Ньютона не имело бы большого значения и нельзя было бы счи-

тать его очень убедительным, если бы силы, определяемые этим способом, так мало менялись в течение опыта, что как бы их ни определять, во всяком случае оставаясь в данных пределах точности, надо было бы ожидать одних и тех же результатов.

Но что касается изменения сил, сообразно с гипотезою Ньютона, то надо заметить, что они пропорциональны

$$\frac{du}{dr},$$

а на основании уравнений (2) и (7) эти силы пропорциональны

$$-\frac{p_0 r}{2\mu l}.$$

Следовательно, сила внутреннего трения, приходящаяся на квадратную единицу поверхности где-нибудь внутри трубки на расстоянии r от ее оси, будет

$$\mu\frac{du}{dr}=-\frac{p_0 r}{l}.$$

В двух разных опытах с одною и той же трубкой силы, соответствующие одинаковым r, будут прямо пропорциональны p_0. Табл. 2 показывает, что при опытах над трубкою k крайние давления, т. е. крайние величины p_0, были почти 55 мм и 6137 мм; следовательно, наибольшее давление превосходило наименьшее слишком в 111 раз. Следовательно, по гипотезе Ньютона напряжение сил, действовавших в последнем опыте, превосходило напряжение соответствовавших сил, действовавших в тех же местах трубки в первом опыте, в 111 раз. Если, несмотря на такое различие предполагаемых сил, результаты вычислений, сделанных на основании этого предположения, совпадают с результатами десяти разных опытов, как показывает табл. 2, представляя разницы не более 0.001, то уже не остается сомнения, что гипотеза не может много отличаться от истины. И если результаты вычислений, предполагающих, что силы пропорциональны первой степени относительной скорости, т. е. du/dr, так близко

совпадают с результатами опытов, несмотря на изменения величин в пределах от 1 до 111, то уже крайне трудно ожидать, что результаты других вычислений, допускающих, что силы трения пропорциональны, могли бы лучше совпадать с результатами наблюдений.

53. Казалось бы, что опыты Пуазейля вполне хорошо подтверждают гипотезу Ньютона. Сомнение может явиться разве только по поводу безошибочности опытов. Подобные подозрения рассеиваются только повторением или проверкою опытов другими лицами. Такая проверка была предпринята Парижской академией, и вновь сделанные опыты над тонкими трубками вполне подтвердили результаты, найденные Пуазейлем. Затем кенигсбергский доктор Якобсон исследовал, применимы ли законы Пуазейля к трубкам гораздо больших диаметров, чем трубки Пуазейля (§ 48). Диаметры трубок, исследованных Якобсоном, были следующие:[1]

Трубки	A	$\rho=0.8769$ мм	или	$d=1.7538$
»	B	$\rho=1.1470$ »	»	$d=2.2940$
»	C	$\rho=1.4328$ »	»	$d=2.8656$

Диаметры этих трубок были, очевидно, чрезвычайно близки к диаметрам трубок Жирара. Трубки Якобсона, подобно трубкам Жирара, были медные. Результаты опытов Якобсона вполне подтвердили наблюдения Пуазейля.

54. Для доказательства близости результатов, найденных Якобсоном, с результатами Пуазейля Якобсон написал закон Пуазейля или второе уравнение группы (10) в виде

$$p=k\frac{l}{\rho^2}c,$$

где c выражает среднюю скорость струи.

[1] *Reichardts* u. *Dubois*. Reymonds Archiv, 1860, S. 81.

Величину k он определил из своих наблюдений, причем величины p измерялись прусскими дюймами. Результаты его вычислений доставили ему:

ρ		t	k
0.8769	553.3 мм	16 8°	0.000034240 г
		16.6	0.000034896
		16.6	0.000034568
		16.8	0.000034488
	518.2 мм	15.1°	0.000035960 г
		15·1	0.000035904
		15.1	0.000035752
		15.4	0.000035472
1.1470	518.1 мм	11.2°	0.000041320 г
		11.2	0.000041256
		11.6	0.000040648
	437 мм	12.2°	0.000038472 г
		12.2	0.000038048
		17.0	0.000034384
		18.9	0.000033016
		20.2	0.000031720
1.4328	620.4 мм	13.4°	0.000036720 г
		13.4	0.000036325
		13.4	0.000036584
		15.6	0.000035728
		15.8	0.000035264
		15.8	0.000035136
		16.7	0.000034504

А по формуле Пуазейля и при тех же единицах меры

t	k	t	k
0°	0.000055488 г	15.5°	0.000035232 г
10	0.000041448	16.5	0.000034328
11.5	0.000039176	18.9	0.000032352
12.5	0.000038600	20.5	0.000031071
14	0.000036632		

Эта таблица показывает, что оба наблюдателя приходят к результатам, можно сказать, тождественным.

55. Таким образом, можно сказать, что опыты Пуазейля и Якобсона подтверждают гипотезу Ньютона, и, пользуясь ими, можно найти силу трения, которая разовьется внутри жидкости на площади в 1 мм^2 при скорости в 1 мм/сек. Для определения величины μ надо заметить, что в уравнении (10) Q представляет число кубических миллиметров воды, которое вытечет в 1 сек., если p, d и l выражены в миллиметрах, и первое уравнение (9) тоже доставит Q, выраженное в миллиметрах, если h, ρ и l будут выражены в миллиметрах и Δ и μ в миллиграммах. Если h относится к воде, то $\Delta=1$ мг. Пренебрегая в уравнении (9) членом $4\mu/\lambda\rho$ (см. § 51) и сопоставляя уравнения (9) и (10), найдем

$$\mu=\frac{\pi}{128\cdot 135.282\,[1+0.0336793t+0.0002209936t^2]}\,. \tag{12}$$

Отсюда нетрудно определить величину μ при разных температурах. Некоторые величины μ приведены в следующей таблице.

Таблица 5

Температура, °C	Величины μ в мг/мм^2 при скорости в 1 мм/сек
0	0.0001816
10	0.0001335
20	0.0001027
30	0.0000821
40	0.0000672

Отсюда тотчас же видно, что для плоскости в 1 м^2 при скорости в 1 см величина μ будет больше вышеприведенных в 10 000 000 раз, а если выразить μ в граммах вместо миллиграм-

мов, то числа будут больше вышеприведенных в 10 000 раз, и, следовательно, то сопротивление, которое встретила бы площадь в 1 м^2, двигаясь, вдоль своей плоскости со скоростью в 1 см/сек. при температуре $t=20^\circ$ С, или 16° R, было бы 1.027 г, т. е. то самое число, которое было упомянуто выше (§ 22, 4).

56. Несмотря, однако, на замечательную точность совпадения результатов, полученных вычислением, основанным на гипотезе Ньютона, с результатами крайне разнообразных опытов Пуазейля (§ 51), подтвержденных опытами Парижской академии и опытами Якобсона, гипотеза Ньютона подвергалась и по настоящее время подвергается еще сомнениям.

Поводом к этим сомнениям служит прежде всего то, что вышеприведенные формулы Навье не применимы ни к каналам, ни даже к трубам большого диаметра; эти эмпирически найденные формулы, выражающие сопротивление жидкости при движении ее в открытых каналах и трубах,—точно так же, как и сопротивление, найденное Бофуа и Фрудом, исправленное известным нашим ученым Д. И. Менделеевым[1] при движении досок в больших бассейнах,— не могут быть приведены к виду линейной функции от средней скорости течения воды или движения досок; но эти сопротивления весьма удовлетворительно выражаются формулами второй степени от средней скорости течения или от скорости движения досок. Другим поводом служит кажущаяся возможность найти аналитическим путем такое уравнение, определяющее количество воды, протекающей через трубку, которое, согласуясь с опытами Пуазейля, было бы выведено, основываясь на предположении, что сила трения жидкости пропорциональна формуле второй степени. Если бы предполагаемое здесь согласие между уравнением и опытами было найдено безошибочно, то, без сомнения, не оставалось бы возможности

[1] Д. Менделеев. О сопротивлении жидкости и о воздухоплавании вып. первый, 1880, стр. 67, уравнение (X).

поддерживать гипотезу Ньютона. Но, как увидим ниже, этого согласия нет (§ 59).

57. Приведенные возражения необходимо рассмотреть несколько ближе и показать их недостатки.

Так, еще Сонне,[1] извлекая из мемуара Навье формулу, выражающую отношение между среднею и наибольшею скоростью движения воды в канале, нашел, что пределы отношения, указанные Навье, не согласуются с наблюдениями. Отсюда Сонне приходит к заключению, что гипотеза, принятая Навье за основание, недостаточно полна. Сонне дополняет гипотезу, делает выводы и получает, что разность скоростей на поверхности воды около стенки канала должна быть пропорциональна R^2J; а между тем все опыты приводят к результату $\sqrt{RJ}$. Здесь R — средний радиус сечения канала, а J — падение на единицу длины канала. Стало быть, исправление Сонне не подвинуло дела вперед.

Опыты Дарси над трубками большого диаметра, сделанные с трубкою Пито, определявшею скорости воды в трубке на разных расстояниях от оси, побудили его допустить предположение, что гипотеза Навье должна быть заменена и что внутреннее трение следует считать пропорциональным не du/dr, но

$$R^2\left(\frac{du}{dr}\right)^2;$$

Справедливость требует заметить, что результаты вычислений на основании этой гипотезы оказались тоже неудовлетворительными.[2] Стало быть, и попытка Дарси заменить гипотезу Навье не увенчалась успехом.

---

[1] *Sonnet.* Recherches sur le mouvement uniforme des eaux, 1845; *Darcy* et *Bazin.* Recherches hydrauliques, p. 25.

[2] *Kleitz.* Etudes sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement, Notes A., p. 211.

Наконец, Д. И. Менделеев, рассматривая результаты предшествующих работ относительно трения жидкостей в трубках и в особенности разбирая опыты Бофуа и Фруда с досками, плававшими в больших бассейнах, говорит:[1] «Несомненно, однако, что в опытах, произведенных в тонких капиллярных трубках, замедляющая сила, или трение, оказалась почти пропорциональною первой степени скорости, а в широких трубках — почти квадрату скорости», затем далее: «Если обратить внимание на то, что при опытах в тонких трубках влияющие поверхности велики, а *относительные скорости малы*, при широких же трубках обыкновенно скорости *велики*, а относительные поверхности малы, то должно думать, что все дело трения в трубках сведется к одному общему закону, в котором при больших скоростях окажут влияние те члены, которые почти исчезают при малых, и обратно. Но до такого общего закона еще, повидимому, не скоро дойдут в гидродинамике». Потом: «Недостаточная общность теоретических начал и недостаточность приемов математического анализа явлений трения видны из того уже, что, приступая к разбору явления, в основных уравнениях сразу обыкновенно отбрасывают некоторые члены. Так при наиболее полном и успешном анализе внутреннего трения[2] обычно начинают с того, что прямо отбрасывают члены, содержащие квадраты скоростей; это здесь возможно потому, что скорости здесь малы».

Насколько анализ, отбрасывающий квадраты вовсе не малых скоростей, успешно выразил результаты тех наблюдений, где он применим, это было уже показано (§ 50 и 51). Не мешает заметить, что средние скорости истечения в трубках Пуазейля, доходившие до 1266.5 мм/сек (§ 49) или до 4.1 фут/сек, были

[1] О сопротивлении жидкости и о воздухоплавании, в. 1, стр. 95 и 96.

[2] Вероятно, автор тут по нечаянности пропустил слова: «в капиллярных трубках». На эту мысль меня наводит конец цитированной фразы.

ничуть не меньше скоростей, встречавшихся в большом числе случаев при опытах над трубами больших диаметров,[1] и скоростей, бывших при многих опытах Бофуа и Фруда. Наибольшие же скорости жидкости, двигавшейся в трубке, соответствовавшие частицам, находившимся на оси, еще гораздо ближе к наибольшим скоростям движения досок Фруда. Величина наибольшей скорости движения воды в трубках Пуазейля и Якобсона получится из совокупности уравнений (4) и (7) и будет

$$U_0 = \frac{p\rho^2}{4\mu l}.$$

Сравнение этой формулы со вторым уравнением группы (8), при отбрасывании в нем члена $4\mu/\lambda\rho$, тотчас же показывает, что наибольшая скорость в два раза больше средней скорости. Следовательно, в опытах Пуазейля средние части жидкости двигались со скоростями, доходившими до 2.333 м, или 8.2 фута, в секунду, т. е. были немного меньше самых больших скоростей, наблюдавшихся в опытах Фруда и равных 10 фут/сек.

С приведенным здесь дословным мнением Д. И. Менделеева нельзя не согласиться и по другой причине: потому что нет еще решительно никакого материала, не исключая и опытов Гельмгольца и Пиотровского и опытов О. Е. Мейера, который мог бы служить бесспорным основанием для произнесения такого приговора. Недостаток анализа, принимающего в расчет только первые степени относительно скоростей, если он действительно существует, может обнаружиться только тогда, когда удаст-

---

[1] При опытах Дарси средние скорости были (*Cleitz.* Etudes sur les forces moléculaires. Note A, p. 213): в чугунной трубе *A* диаметром 0.188 м, средние скорости истечения: 0.768, 1.128, 1.488, 1.933, 2.506 и 4.323 м/сек; в чугунной трубе *B* диаметром 0.2447 м средние скорости: 0.537, 0.949, 1.904, 4.497 м/сек. В трубе *C* диаметром 0.297 м средние скорости: 0.355, 1. 236, 1.665, 2.365 мм/сек. В трубе *D* диаметром 0.50 м средние скорости были: 0.4752, 0.7951, 1.1197 м/сек.

ся найти точное решение какого-нибудь из вопросов, рассматривавшихся Сонне, Дюпюи, Бофуа, или какого-нибудь другого и когда результаты этого решения не будут согласоваться с результатами хорошо выполненных наблюдений. В настоящее же время, когда ни один из этих вопросов еще не решен на основании уравнений Навье, когда еще нет никаких результатов разбираемого анализа, относящихся к указанным вопросам, когда еще вовсе не известно, какою функцией средней скорости, руководясь правильным анализом, надо будет выразить сопротивление, встречающееся в больших трубках, в каналах или тому подобных явлениях, очевидно, что приговор о недостаточности анализа не имеет прочного основания.

Недостаток анализа относительно рассматриваемых вопросов действительно существует, но он состоит не в отбрасывании членов, содержащих квадраты или другие высшие степени относительных скоростей, а в том, что интегралы дифференциальных уравнений Навье не известны, что до сих пор еще не исследованы свойства функций, удовлетворяющих этим дифференциальным уравнениям. Приведенное мною возражение Д. И. Менделееву могло бы, однако, потерять силу, если бы можно было сказать, что действительно для безусловно правильного суждения о применимости анализа надо иметь, хотя бы для одного какого-нибудь из указанных случаев, полное решение дифференциальных уравнений. Но есть ли основание предугадывать результат, принимая в расчет, что явления, подвергавшиеся наблюдениям Сонне, Дюпюи и многих гидродинамиков, изучавших движение воды в трубах большого диаметра и движение досок в открытых больших бассейнах, немного отличаются от движения воды в капиллярных трубках Пуазейля, где частицы ее перемещались прямолинейно. Без сомнения, это предугадывание и вызывало возражения против гипотезы Навье; но на этот раз оно было недостаточно основательно.

Все возражения вытекают из несогласия между результатами вычислений, соответствующими прямолинейному движению,

и результатами, полученными при таких опытах, где движения струй жидкости были заведомо непрямолинейны. О множестве водоворотов, сопровождающих движение воды в каналах, известно уже давно; на этот предмет уже обращали внимание Декарт и даже Леонардо да Винчи[1] и затем целый ряд итальянских и французских гидродинамиков и математиков, между которыми в особенности выдаются Понселе и Сен-Венан. Сильные водовороты и вообще отклонения от прямолинейного движения в стеклянных трубках прямо наблюдал Гаген, как выше было сказано (§ 36). Сен-Венан и Дарси заметили даже, что сопротивление от трения (происходящего от увеличения путей, проходимых точками приложения сил трения) возрастает вместе с увеличением поперечного сечения канала. Буссинеск,[2] принимая это обстоятельство в соображение, вводит даже некоторый особый коэффициент трения, относящийся к некоторому несуществующему прямолинейному движению, заменяющему истинное движение воды в трубе или в канале. Этот коэффициент должен быть, конечно, больше действительного коэффициента трения, который следовало бы вводить , если бы умели принять в расчет истинное движение струй воды. Оказывается, что и в самом деле он превосходил истинный коэффициент трения иногда в 100 и более раз, смотря по поперечным измерениям струи, в которой развиваются различные пертурбации. Отсутствие прямолинейного движения струй воды около двигающихся в большом бассейне прямых досок тоже известно уже давно.[3]

Итак, все наблюдения, на основании которых гипотеза Ньютона подвергалась сомнению, производились действительно над такими движениями жидкости, для которых если что-нибудь знали о путях, проходимых точками приложения сил трения,

[1] «Essai sur la theorie des eaux courantes», par Boussinesq, Rapport, p. IV.

[2] *Boussinesq*. Essai, § 12, p. 49.

[3] *Poncelet*. Introduction à la mécanique industrielle. Troisième édition, § 376, p. 573.

так только то, что они были далеко не прямолинейны. Стало быть, все эти опыты должны быть признаны негодными для проверки гипотезы Ньютона, а следовательно они не могут служить основанием для опровержения ее.

58. Французский математик, член института, Леви, основываясь на теоремах Коши, доставляющих соотношение между силами трения, развивающимися на гранях бесконечно малого тетраэдра, доказывает даже[1] математическую невозможность предположения, что трение пропорционально $\left(\frac{dv}{dr}\right)^2$ и даже— формуле более общего вида

$$A\left(\frac{dv}{dr}\right)+B\left(\frac{dv}{dr}\right)^2+C\left(\frac{dv}{dr}\right)^3+\ldots$$

Он говорит, что если только трение жидкости может быть выражено первою производною скорости (относительною скоростью), то оно непременно выразится произведением dv/dr на некоторый постоянный множитель, и что этот множитель, если он может быть переменным, то только при переходе от одной точки к другой, и что для различных плоскостей, пересекающихся в одной и той же точке, он будет величиною постоянною. Но это последнее условие не может быть выполнено, как только будет допущена вышеприведенная формула, ибо ее, очевидно, можно написать в виде

$$\left(A+B\frac{dv}{dr}+C\left(\frac{dv}{dr}\right)^2+\ldots\right)\frac{dv}{dr},$$

а тут множитель, стоящий перед dv/dr, есть

$$A+B\frac{dv}{dr}+C\left(\frac{dv}{dr}\right)^2+\ldots,$$

[1] C. R., t. LXVIII, 1869, p. 585 et suiv. Hydrodynamique. Rapport sur un mémoire de M. *Maurice Levy*. Par MM. *Combes*, *Serret*, *Bonnet*, *Phillips*, de *Saint-Venant* rapporteur.

величина не постоянная для разных плоскостей, пересекающихся в одной и той же точке.

59. На этом указании французских академиков, не имея перед глазами всех соображений Леви, к сожалению, не напечатанных, остановиться еще, однако, нельзя. Клейтц в своем весьма замечательном сочинении[1] доказал, что множитель перед dv/dr, обозначенный в этой статье буквою μ и обозначаемый им φ, может зависеть от относительных скоростей, и потому возможно, что сила сцепления выразится формулою вида

$$\left[A + B\frac{dv}{dr} + C\left(\frac{dv}{dr}\right)^2 + \ldots\right]\frac{dv}{dr}.$$

Формулы Клейтца, указывая возможность, не показывают, однако, необходимости такого выражения, и необходимость эта может быть доказана только из сличения результатов вычисления с результатами опыта.

В другом месте того же сочинения Клейтц старается показать,[2] что эта форма выражения силы сцепления, не согласная с гипотезою Ньютона, не противоречит никаким опытам и в том числе опытам Пуазейля. Чтобы подтвердить свое мнение, Клейтц говорит, что в случае равномерного движения в цилиндрической трубке он, подобно Сен-Венану, принимает, что

$$\varphi = \varepsilon + \varepsilon_1\left(\frac{dv}{dr}\right)^2,$$

но что из разбора опытов Пуазейля, где диаметры трубок заключались в пределах от $^1/_7$ до $^2/_3$ мм, Сен-Венан не имел права заключить, что $\varepsilon_1 = 0$, причем выражение, определяющее величину силы сцепления, опять приняло бы форму

$$\varepsilon\,\frac{dv}{dr},$$

согласную с гипотезою Ньютона.

---

[1] Id. Appendice, p. 197 et suiv.

[2] Id.

Принимая формулу Сен-Венана, выражающую среднюю скорость u течения воды по трубке, имеющей радиус r, и обозначая плотность ρ, а ускорение силы тяжести g, Клейтц пишет

$$u=\frac{\rho g}{2\varepsilon}\frac{ir^2}{4}\left[1-\frac{2}{3}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\left(\frac{\rho g}{2\varepsilon}\right)^2(ir)^2+\frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2\left(\frac{\rho g}{2\varepsilon}\right)^4(ir)^4+\ldots\right].$$

Сличая это уравнение с опытами Пуазейля и замечая, что по опытам

$$u=\frac{\rho g}{2\varepsilon}\frac{ir^2}{4},$$

Сен-Венан заключил, что необходимо, чтобы

$$\varepsilon_1=0.$$

В опровержение этого заключения Клейтц говорит: «В опытах Пуазейля падение на единицу длины доходило до 421. Но так как наибольший диаметр трубки не превосходил $\frac{2}{3}$ мм (0.00066 м), то наибольшая величина произведения ir была $\frac{421\cdot 0.001}{3}=0.14$. При величинах средней скорости, доходившей до 42 м/сек, члены ряда, заключенного в скобки, в которых ir входит в квадрате, в четвертой и т. д. степенях, должны были быть совершенно незаметными, и средняя скорость могла быть пропорциональна ir^2».

Если бы это замечание Клейтца было правильно, то формула Пуазейля

$$u=\frac{\rho g}{2\varepsilon}\frac{ir}{4}=\frac{\rho g}{32\varepsilon}\frac{hd^2}{l}$$

получилась бы теоретическим путем, с известною степенью приближения, не только при предположении, что силы сцепления выражаются верно гипотезою Ньютона, но и при

предположении, что эта гипотеза неверна и что силы сцепления выражаются формулою

$$\left[\varepsilon + \varepsilon_1 \left(\frac{dv}{dr}\right)^2\right] \frac{dv}{dr}.$$

Таким образом, опыты Пуазейля потеряли бы свою цену в отношении поверки правильности гипотезы Ньютона.

Опровержение Клейтца, однако, неверно и основано на непонятном упущении. Клейтц не обратил внимания на то, что ряд, поставленный в скобках, заключает множителями не только ir в разных степенях, но еще и $\rho g/2\varepsilon$ в тех же самых степенях, другими словами, содержит множители

$$\frac{\rho g}{2\varepsilon} ir.$$

Эта величина по опытам Пуазейля может быть выражена в зависимости от средней скорости течения воды в трубке.

Действительно, так как

$$u = \frac{\rho g}{2\varepsilon} \frac{ir^2}{4},$$

то

$$\frac{\rho g}{2\varepsilon} ir = \frac{4u}{r}.$$

Величины этого произведения уже далеко не ничтожны. Из таблицы 11 (§ 49) видно, что при наименьшей скорости $u = 8.56$ мм

$$\frac{\rho g}{2\varepsilon} ir = \frac{4 \cdot 8.56}{0.0658} = 520,$$

а при наибольшей скорости $u = 948.7$ мм

$$\frac{\rho g}{2\varepsilon} ir = \frac{4 \cdot 948.7}{0.0658} = 57\,672.$$

Очевидно теперь, что ряд, содержащий степени этих чисел (квадрат, четвертую и т. д.), умноженные на $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$, $\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right)^2$ и т. д., в таком только случае может не отличаться от единицы, если $\varepsilon_1 = 0$.

Следовательно, возражение Клейтца должно быть оставлено, и должно быть принято, что опыты Пуазейля подтверждают гипотезу Ньютона.

60. Относительно вывода Клейтца можно еще предполагать, что несогласие между его формулою и опытами Пуазейля произошло потому, что в формулу сопротивления он ввел $\left(\frac{du}{dr}\right)^3$ на место $\left(\frac{du}{dr}\right)^2$; что если бы силу внутреннего трения считать величиною пропорциональною

$$\mu \frac{du}{dr} + \nu \left(\frac{du}{dr}\right)^2,$$

то несогласие исчезло бы само собой.

Разрешить этот вопрос в общем виде — дело до крайней степени трудное; но в случае прямолинейного движения частиц воды по капиллярной трубке решение получается довольно легко. Этого частного решения, впрочем, вполне достаточно, потому что сравнение с опытами Пуазейля опять показывает, что $\left(\frac{du}{dr}\right)^2$ не имеет влияния на величину внутреннего трения.

Приступая к выводу формулы, определяющей количество жидкости, которое должно протекать через трубку, сделаем опять те же предположения, которые были указаны в § 31, исключая только гипотезу Ньютона, которая теперь заменяется предположением, что сила трения пропорциональна

$$\mu \frac{du}{dr} + \nu \left(\frac{du}{dr}\right)^2.$$

Способ вывода в главных его чертах будет тот же, какой был уже приведен в § 32.

В настоящем случае надо сделать, впрочем, еще одно замечание: оба члена приведенной формулы должны иметь один и тот же знак, иначе, при некоторой величине $\left(\frac{du}{dr}\right)_1$, она обратится в нуль, и, следовательно, при некоторой относительной скорости сила трения будет нуль, и если при величинах

$$\frac{du}{dr} < \left(\frac{du}{dr}\right)_1$$

двучлен был отрицательный, то при величинах

$$\frac{du}{dr} > \left(\frac{du}{dr}\right)_1$$

тот же двучлен будет положительным, т. е. как будто бы при одних относительных величинах du/dr сила трения будет направляться в одну сторону, а при других—в другую. Это последнее обстоятельство уже вполне невозможно. Итак, необходимо, чтобы знаки членов $\mu\frac{du}{dr}$ и $\nu\left(\frac{du}{dr}\right)^2$ были одинаковы. В § 32 было уже объяснено, что du/dr есть величина отрицательная; очевидно, что $\left(\frac{du}{dr}\right)^2$ есть величина во всяком случае положительная; следовательно, принимая μ величиною положительною, надо считать ν величиною отрицательною.

Сделав это замечание, нетрудно уже написать величины сил, действующих на стороны бесконечно малого элемента жидкости (фиг. 1). Сила трения, действующая на поверхность *cn* будет [2]

$$-\left[\mu\frac{du}{dr}+\nu\left(\frac{du}{dr}\right)^2\right] rd\varphi\, dx. \qquad (E')$$

Сила трения, действующая на поверхность fm, будет

$$\left\{\mu \frac{du}{dr} + \nu \left(\frac{du}{dr}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dr}\left[\mu \frac{du}{dr} + \nu \left(\frac{du}{dr}\right)^2\right] dr \right\} (r + dr)\, d\varphi\, dx. \qquad (F')$$

Гидродинамические давления на поверхности cf и mn будут попрежнему

$$prd\varphi dr \qquad \text{и} \qquad -\left(p + \frac{dp}{dx} dx\right) rd\varphi dr.$$

Сумма проекций всех этих четырех сил на направление оси трубы доставит уравнение

$$\frac{d\left\{r\left[\mu \frac{du}{dr} + \nu \left(\frac{du}{dr}\right)^2\right]\right\}}{dr} = r \frac{dp}{dx};$$

припоминая опять (§ 32), что

$$\frac{dp}{dx} = -B,$$

нетрудно найти, что

$$\left\{r\left[\mu \frac{du}{dr} + \nu \left(\frac{du}{dr}\right)^2\right]\right\}_{r=r} -$$

$$-\left\{r\left[\mu \frac{du}{dr} + \nu \left(\frac{du}{dr}\right)^2\right]\right\}_{r=0} = -B\frac{r^2}{2}.$$

При $r=0$ величина du/dr не может быть бесконечно большою, ибо это значило бы, что сила трения жидкости, двигающейся около оси трубки, бесконечно велика. Следовательно, второй член первой части последнего уравнения при $r=0$ обращается в нуль, и стало быть [3]

$$\mu \frac{du}{dr} + \nu \left(\frac{du}{dr}\right)^2 = -\frac{Br}{2}.$$

Отсюда тотчас же находим, что

$$\frac{du}{dr}=-\frac{\mu\pm\sqrt{\mu^2-2\nu Br}}{2\nu}.$$

Нетрудно заметить, что [4]

$$\sqrt{\mu^2-2\nu Br}>\mu$$

и что, следовательно, знак числителя последней дроби зависит от знака перед радикалом. Если перед радикалом будет оставлен знак —, то du/dr выразится числом отрицательным, как и следует, а если перед радикалом будет поставлен знак +, то для выражения du/dr получится число положительное, не соответствующее условиям задачи.

Следовательно, последнее уравнение надо написать в виде

$$\frac{du}{dr}=-\frac{\mu-\sqrt{\mu^2-2\nu Br}}{2\nu}.$$

Интегрирование этого уравнения в пределах от $r=0$ до $r=r$ доставит величину скорости движения частиц жидкости, удаленных на расстояние r от оси трубки.

Интегрирование будет удобнее, если радикал представим в виде строки

$$\sqrt{\mu^2-2\nu Br}=\mu\left[1-\frac{\nu B}{\mu^2}r+\frac{1}{2}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^2 r^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^3 r^3+\right.$$
$$\left.+\frac{5}{8}\left(\frac{\nu B^2}{\mu^2}\right)^4 r^4-\frac{3}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^5 r^5\ldots\right];$$

тогда

$$\int_0^r\sqrt{\mu^2-2\nu Br}\,dr=\mu r\left[1-\frac{1}{2}\frac{\nu B}{\mu^2}r+\frac{1}{6}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^2 r^2-\frac{1}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^3 r^3+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^4 r^4-\frac{7}{48}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^5 r^5+\ldots\right].$$

Обозначая u_0 скорость на оси трубы, соответствующую $r=0$, найдем

$$u - u_0 = -\frac{\mu r}{2\nu}\left[\frac{1}{2}\frac{\nu B}{\mu^2}r - \frac{1}{6}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^2 r^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^3 r^3 - \frac{1}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^4 r^4 + \frac{7}{48}\left(\frac{B}{\mu^2}\right)^5 r^5 - \ldots\right].$$

Если во второй части этого равенства вставим радиус трубки ρ на место r, то в первой части величина u выразит скорость жидкости вдоль стенки трубки. Известно, что если жидкость смачивает стенку, то эту скорость можно считать равною нулю. Следовательно, при $r=\rho$, $u=0$

$$-u_0 = -\frac{\mu\rho}{2\nu}\left[\frac{1}{2}\frac{\nu B}{\mu^2}\rho - \frac{1}{6}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^2 \rho^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^3 \rho^3 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^4 \rho^4 + \frac{7}{48}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^5 \rho^5 - \ldots\right].$$

Вычитая это уравнение из предыдущего, найдем

$$u = \frac{\mu}{2\nu}\left[\frac{1}{2}\frac{\nu B}{\mu^2}(\rho^2 - r^3) - \frac{1}{6}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^2(\rho^3 - r^3) + \right.$$
$$+ \frac{1}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^3(\rho^4 - r^4) - \frac{1}{8}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^4(\rho^5 - r^5) +$$
$$\left. + \frac{7}{48}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^5(\rho^6 - r^6)\ldots\right].$$

Когда известна скорость движения жидкости на каком угодно расстоянии r от трубки, тогда объем жидкости Q, вытекающей из трубки в течение единицы времени, будет

$$Q = 2\pi\int_0^\rho ur\,dr,$$

и на основании предыдущего уравнения

$$Q=\frac{\pi B}{8\mu}\rho^4\left[1-\frac{2}{5}\frac{\nu B}{\mu^2}\rho+\frac{1}{3}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^2\rho^2-\frac{5}{14}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^3\rho^3+\dots\right].$$

Это уравнение явилось взамен уравнения (5) (§ 32). Средняя скорость v движения воды по трубке получится, как только объем Q разделим на величину площади поперечного сечения $\pi\rho^2$ трубки; следовательно,

$$v=\frac{B\rho^2}{8\mu}\left[1-\frac{2}{5}\frac{\nu B}{\mu^2}\rho+\frac{1}{3}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^2\rho^2-\frac{5}{14}\left(\frac{\nu B}{\mu^2}\right)^3\rho^3+\dots\right].$$

Из опытов Пуазейля уже известно, что с весьма большою степенью точности можно принимать, что

$$v=\frac{B\rho^2}{8\mu} \quad \text{или} \quad \frac{B\rho^2}{\mu}=8v.$$

Следовательно, вводя $8v$ на место $B\rho^2/\mu$ в последнее выражение, определяющее Q, будем делать ошибку очень малую. Эта замена доставит уравнение

$$Q=\frac{\pi}{8}\frac{B}{\mu}\rho^4\left[1-\frac{2}{5}\frac{\nu}{\mu}\frac{8v}{\rho}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\left(\frac{8v}{\rho}\right)^2-\frac{5}{14}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^3\left(\frac{8v}{\rho}\right)^3+\dots\right].$$

Опыты Пуазейля показали, что при всех наблюдавшихся скоростях v величина

$$\frac{\pi}{8}\frac{B}{\mu}\rho^4,$$

если и отличается от величины Q, определенной опытом, то не более чем на 0.001; следовательно, для всех величин, заключающихся в пределах опытов, должно быть

$$-\frac{2}{5}\frac{\nu}{\mu}\frac{8v}{\rho}+\frac{1}{3}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\left(\frac{8v}{\rho}\right)^2-\frac{5}{14}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^3\left(\frac{8v}{\rho}\right)^3+\dots<0.001.$$

Из табл. 2 видно, что $\rho = 0.0658$ и скорость v была 948.7, стало быть

$$\frac{8v}{\rho} = 115\,343.$$

Следовательно, надо, чтобы

$$\frac{2}{5}\,115\,343\frac{\nu}{\mu} + \frac{1}{3}(115\,343)^2\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2 - \frac{5}{14}(115\,343)^3\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^3 + \ldots < 0.001,$$

откуда тотчас же видно, что

$$\frac{\nu}{\mu} < 0.0000001.$$

Следовательно, если квадрат относительной скорости и должен входить в формулу, выражающую силу трения, то коэффициент ν, стоящий перед квадратом, так мал, что никакие из бывших опытов не могли указать на необходимость этого члена.

Таким образом, можно сказать уже с уверенностью, что в настоящее время нет решительно никаких оснований считать гипотезу Ньютона недостаточно точною.

61. Нельзя оставить без внимания еще одно замечание Леви, относящееся к внутреннему трению жидких тел. Он говорит, что для разъяснения явлений, наблюдаемых в трубах или каналах, не следовало бы останавливаться на той степени точности выражения силы внутреннего трения, которою довольствовался Навье, ограничиваясь первою производною скорости, и что надо принимать в расчет и другие производные высших порядков. Допуская такое, вполне возможное, предположение, Леви показал, что в рядах, выражающих силу трения, должны оставаться производные одних только нечетных порядков. Эти соображения Леви могут быть вполне правильными, но следует

ли их считать безусловно необходимыми, следует ли при решении всяких вопросов принимать в расчет не только первую, но еще и высшие производные даже и тогда, когда дело вовсе еще не идет об объяснении каких-нибудь пертурбаций явления, — это еще вопрос, и притом вопрос, разрешающийся, как кажется, отрицательно. Таково мнение об этом предмете комиссии французских академиков, представивших свой рапорт[1] о мемуаре Леви.

С этим мнением едва ли можно согласиться, припоминая ту необыкновенную точность совпадения между результатами опытов Пуазейля и его эмпирически найденными формулами, не отличающимися от формул, найденных из уравнений Навье, принимая в расчет одну только первую производную скорость (см. § 51), т. е. останавливаясь на гипотезе Ньютона.

62. Все вышеизложенное дает основание надеяться, что внутреннее трение жидкости можно определить вполне удовлетворительно, пользуясь гипотезою Ньютона во всех тех случаях, когда будут средства определить надлежащим образом относительные движения частиц жидкости, или, другими словами, когда окажется возможность проинтегрировать примененные к рассматриваемому случаю уравнения Навье.

Но полная сила трения, развивающаяся при относительном движении твердых и жидких тел, зависит не только от внутреннего, но еще и от наружного трения жидкости, т. е. от трения жидкости о твердое тело.

Коэффициент этого трения, обозначенный λ, уже введен в уравнения (8) и (9), относящиеся к протеканию струи жидкости при известных условиях (§ 31) через горизонтально положенную круглую трубку; но, как уже известно (§ 51), опыты

---

[1] C. R., t. LXVIII, p. 586 et suiv.

Пуазейля доставляют для определения из упомянутых уравнений одно только неравенство

$$\frac{4\mu}{\lambda\rho} < 0.0001.$$

Известно, что из неравенства определять величину нельзя; можно только указать ту величину, более которой λ ни в коем случае быть не может. Приведенное неравенство указывает, что

$$\frac{\lambda}{\mu} > \frac{40\,000}{\rho},$$

а так как для трубки Пуазейля $\dot{M}$ (§ 49) радиус

$$\rho = \frac{0.013949}{2} = 0.006975,$$

то

$$\frac{\lambda}{\mu} > 5\,730\,000.$$

Этот пробел наших знаний побудил Гельмгольца заняться вопросом о внутреннем и внешнем трении жидкостей.[1] Принимая в расчет крайние затруднения делать опыты с трубками больших диаметров, чем было у Пуазейля и Жирара, Гельмгольц вознамерился сделать опыт в другом виде, в таком, однако, чтобы он поддавался теоретическому исследованию. С этой целью Гельмгольц проинтегрировал уравнения Навье, относящиеся к случаю вращательных колебаний наполненного жидкостью шара, повешенного на нити. Интегрирование сделано, допуская гипотезу, что все частицы жидкости, находящиеся на какой-нибудь поверхности шара, имеющей общий центр с шаровым сосудом, содержащим жидкость, остаются на этой поверхности во все время движения жидкости, сопровождающего вращательные колебания сосуда. Другими словами, жидкость во время движения как бы расслаивается на бесчисленное

[1] *Helmholtz*. Wissensch. Abh. Erster Band, Reibung von Flüssigkeiten, S. 172.

множество бесконечно тонких сферических слоев, вставленных один в другой, плотно один к другому прилегающих и во время движения один с другим не смешивающихся.

Опыты, по предложению Гельмгольца, были произведены Пиотровским; но насколько точно вышеуказанная гипотеза осуществлялась во время опыта, не было определено непосредственными наблюдениями, подобно тому как Гаген наблюдал непосредственно прямолинейное движение струй воды в тонких стеклянных трубках.

Опыты показали,[1] что при температуре 24.5° C коэффициент внутреннего трения $\mu = 1.1858$. По опытам Пуазейля, этой температуре соответствует $\mu = 0.95206$, т. е. величина, найденная Пиотровским, относилась к найденной Пуазейлем, как 5 : 4. Это небольшое различие результатов крайне трудных опытов может быть объяснено разными обстоятельствами. Сам Гельмгольц говорит, что наблюдения не отличались особою точностью. Ее не было потому, что для получения результатов, подобных пуазейлевским в отношении точности при способе исследования, предложенном Гельмгольцем, надо было наблюдать времена колебаний шара с точностью до 0.01 сек.[2] Эта степень точности была недостижима, между прочим, потому, что температура в комнате была не настолько постоянна, как это было бы нужно.

Другое вероятное объяснение различия результатов, найденных Пиотровским и Пуазейлем, заключается в неполной точности гипотезы Гельмгольца, будто двигающаяся жидкость как бы расслаивается на бесконечно тонкие сферические слои. Если только во время движения жидкости в ней развиваются какие-нибудь водовороты, что, повидимому, очень правдоподобно, если пути, проходившиеся точками приложения сил трения, были больше предполагавшихся при вычислении, то

[1] *Helmholtz.* Wissensch. Abh., S. 220.
[2] *Helmholtz.* Reibung von Flüssigkeiten, S. 174.

величина коэффициента μ, вычисленного из таких опытов, и должна была оказаться больше величины, определенной Пуазейлем. Поэтому-то величина коэффициента внутреннего трения, найденная Пуазейлем, заслуживает большего доверия, чем величина Пиотровского.

Коэффициент внешнего трения λ Гельмгольц тоже не мог определить из опытов Пиотровского. Он сделал вычисление двумя различными путями и пришел к столь различным результатам, что воспользоваться ими было бы уже слишком рискованно. По одному вычислению $\lambda = 2.3534$, а по другому $\lambda = 0.71545$. Не более близкие результаты получил Гельмгольц в определении λ из опытов Жирара. Опыты с трубками диаметром в 1.83 мм привели к $\lambda = 0.3984$, а опыты с трубками, диаметром в 2.96 мм,— к $\lambda = 0.111$.

Других опытов для определения величины коэффициента внешнего трения жидкости не было сделано, и надо сказать, что величина эта нам надлежащим образом не известна. Следовательно, теперь можно будет разрешать только такие вопросы, касающиеся величины силы трения твердых и жидких тел, в которых величина внешнего трения не играет существенной роли. Опыты Пуазейля уже показали, что если сцепление жидкости с твердым телом очень велико сравнительно с липкостью частиц жидкости между собою, то члены, зависящие от сил трения, развивающихся на поверхности твердого тела, оказываются не имеющими почти никакого значения. Жидкости, употребляемые для смазывания, всегда довольно сильно прилипая к смазываемым ими поверхностям твердых тел, дают повод надеяться, что в вопросах о влиянии смазывающей жидкости на трение не придется иметь дело с коэффициентом трения между жидкостью и твердым телом.

63. Общий вывод из всего сказанного относительно исследования величины сил трения, развивающихся внутри жидкости, выражается следующими положениями:

1) Гипотеза Ньютона верна с большою степенью точности для воды, а следовательно, вероятно, и для других жидкостей, по крайней мере не очень густых.

2) Коэффициент внутреннего трения довольно сильно зависит от температуры (§ 55, табл. 5).

3) Величина коэффициента трения и его зависимость могут быть определены из каких угодно опытов, произведенных при каких угодно скоростях, лишь бы условия опыта удовлетворяли тем предположениям, при которых были проинтегрированы уравнения Навье, относящиеся к разбираемым опытам.

4) Если для опытов будет избран способ Пуазейля, то непременно надо, чтобы были соблюдены следующие условия:

а) испытуемые трубки на своих внутренних поверхностях не должны иметь таких выступов или впадин, которые устраняли бы прямолинейное движение струй воды;

б) испытание должно быть сделано так, чтобы представлялась возможность проверить влияние каждого из элементов, входящих в формулу Пуазейля, следовательно, испытание должно быть произведено над трубками нескольких, довольно различных диаметров; трубки каждого из диаметров следует испытать при разных их длинах. Вытекание жидкости должно быть наблюдаемо под различными давлениями, так чтобы скорости вытекания были достаточно разнообразны.

5) Коэффициент трения внутреннего, а может быть и внешнего, можно будет определить на основании уравнения (9) только тогда, когда будет доказано, что при произведенных опытах движение струй жидкости было достаточно близко к прямолинейному.

64. Возможность определять величину коэффициента внутреннего трения жидкости и зависимость его от температуры при каких угодно скоростях движения, не опасаясь ошибки от неправильного введения скорости в наши формулы, дает право надеяться извлечь верные результаты из опытов с кру-

тильными весами, несмотря на крайне медленные движения их диска, с тем, конечно, непременным условием, чтобы зависимость между коэффициентом внутреннего трения и временами колебаний была найдена из уравнений Навье с совершенною точностью, или, в случае необходимости, были сделаны какие-нибудь допущения для возможности интегрирования еще с тем условием, чтобы все сделанные допущения были проверены прямым наблюдением.

В этом последнем виде задачу решил О. Е. Мейер.[1] Он определил коэффициент внутреннего трения для колодезной и дестиллированной воды и получил величину, очень мало отличающуюся от величины, найденной Пуазейлем. Этот отдел опытов О. Е. Мейера имеет для нас значение весьма второстепенное в отношении к определению величины внутреннего трения воды, но становится весьма важным как доказательство возможности достигнуть весами Кулона правильных результатов. Как только это убеждение получено, тотчас же другой отдел опытов Мейера получает, в видах этой статьи, чрезвычайно важное значение. В этом другом отделе опытов О. Е. Мейер исследовал,[2] между прочим, величину коэффициента внутреннего трения сурепного масла при различных температурах. Это было первое и до сих пор едва ли не единственное исследование; поэтому совершенно невозможно оставить результаты наблюдений О. Е. Мейера без серьезного с ними знакомства.

65. Математическая часть решения вопроса относительно зависимости между коэффициентом внутреннего трения испытуемой жидкости и временами колебаний помещенного в ней

---

[1] Ann. d. Phys. u. Chem. v. Pogg., Bd. 113, 1861, S. 55—86, 193—238 u. 382—425. Опытная часть и теоретическая часть. Journ. f. reine u. angew. Math., Crell, Bd. 59, S. 229.

[2] Pogg. Ann., Bd. 113, S. 420.

диска крутильных весов Кулона (§ 21) настолько сложна и обширна, что приводить ее здесь было бы неудобно; желающим ознакомиться с нею надо обратиться к мемуару О. Е. Мейера, помещенному в журнале Крелля под заглавием «Ueber die Reibung der Flüssigkeiten». Здесь будет достаточно ограничиться указанием тех допущений, при которых решен вопрос. Для интегрирования уравнений Навье, относящихся к рассматриваемому частному случаю, Мейер допустил, что жидкость состоит как бы из бесконечно тонких горизонтальных круглых слоев, лежащих над диском и под диском, что во время колебаний диска слои эти один с другим не смешиваются, а что они один относительно другого перемещаются, вращаясь около общей оси. Слои, непосредственно примыкающие к диску, вращаются вместе с ним; слои, лежащие довольно далеко от диска, совсем не вращаются; остальные же слои, промежуточные, вращаются тем больше, чем ближе лежат к диску. Строго говоря, такое движение слоев невозможно: вращательное движение частиц жидкости, вследствие их инерции, будет непременно сопровождаться некоторым движением по направлению радиуса; мало того, если во время покоя диска частицы лежат по направлению перпендикуляра к его горизонтальной поверхности, то во время движения эти же частицы будут располагаться по некоторым спиралям, и так как длина спирали будет одинакова с длиною перпендикуляра, то расстояния частиц от диска не могут оставаться без перемены. Следовательно, во время колебаний диска будут непременно некоторые движения по направлениям, параллельным с осью вращения.

Возможность этих допущений без грубых ошибок О. Е. Мейер проверил наблюдением, и для этого он помещал в жидкости легкие, плавающие тела, как, например, маленькие кусочки бумаги, размещал их правильными фигурами и наблюдал изменение этих фигур во время колебаний диска. Оказалось, что фигуры весьма хорошо сохраняли свою форму. Другое обстоятельство, не вполне точно принятое в расчет, было

участие частиц, лежащих вне тех круглых слоев, имевших один диаметр с диском.

Все эти обстоятельства заставляют думать, что истинные скорости, при которых происходило трение, были больше принятых при вычислении, или что скорости, вводимые в вычисления, были меньше действительных, а следовательно вычисляемый коэффициент трения должен был оказаться больше действительного. Результаты наблюдений О. Е. Мейера[1] над водою превосходят соответствующие результаты Пуазейля и Якобсона приблизительно на 16 или на 20%. Для множества практических выводов такая степень точности уже довольно удовлетворительна сама по себе.

66. Результаты наблюдений над сурепным маслом показаны в следующей таблице.[2]

Таблица 6

Температура, °C	Плотности	Величина μ в мг/см² при скорости в 1 см/сек
0	0.9292	69.3
6.5	0.9254	14.9
12.4	0.9211	7.52
13.9	0.9201	6.79
18.1	0.9168	3.44
24.5	0.9133	2.19
29.5	0.9102	1.65
31.6	0.9087	1.50

Чтобы сравнить приведенные в этой таблице результаты с результатами, относящимися к воде и помещенными в табл. 5 (§ 55), надо написать величины μ в мг/мм² при скорости

[1] Pogg. Ann., S. 421 u. 422.
[2] Id., S. 410.

в 1 мм/сек; а для этого надо только все числа, приведенные в третьем столбце табл. 6, уменьшить в 100 раз. Эти же числа можно весьма удовлетворительно выразить формулою

$$\mu = \frac{1}{1.4 + 0.529t + 0.0507t^2}. \qquad (12a)$$

Насколько близко эта формула представляет опыты, можно ознакомиться, рассматривая числа, которые представляет табл. 7.

Таблица 7

Температура, °C	Коэффициент внутреннего трения μ в мг/мм² при скорости в 1 мм/сек	
	по опыту	по формуле (22)
0	0.6930	0.7142
6.5	0.1490	0.1433
12.4	0.0752	0.0635
13.9	0.0679	0.0540
18.1	0.0344	0.0362
24.5	0.0219	0.0223
29.5	0.0165	0.0163
31.6	0.0150	0.0143

Из этой таблицы тотчас же видно, что уменьшение коэффициента трения идет сначала чрезвычайно быстро, а потом гораздо медленнее. Из сравнения табл. 7 с табл. 5 видно, что вообще внутреннее трение сурепного масла гораздо больше внутреннего трения воды. При нуле первое больше второго в 3816 раз, а при 14° первое больше второго в 560 раз.

Результаты своих опытов над продажным сурепным маслом, употребляемым для ламп, О. Е. Мейер сравнил[1] с результатами, найденными Кулоном, причем оказалось, что внутреннее

[1] Pogg. Ann., S. 418 u. 419.

трение, по определению Мейера, вышло в два раза меньше найденного Кулоном. Это обстоятельство Мейер приписывает неодинаковой чистоте масел, бывших у Кулона и у него. Если же числа Мейера верны, в чем, повидимому, трудно сомневаться, то внутреннее трение масла, над которым делал опыты Кулон при температуре в 20° С, превосходило внутреннее трение воды при той же температуре почти в 600 раз, а не в 17.5, как указывал Кулон (§ 22).

Сила трения на поверхности вертикального круглого цилиндра безграничной длины, вращающегося внутри жидкости, заключенной в другом круглом цилиндре, когда оба цилиндра имеют одну и ту же геометрическую ось

67. Этот вопрос представляет много общих черт с вопросами, касающимися трения машинных частей. В настоящее время даже нет другого явления, обстоятельства которого ближе подходили бы к обстоятельствам движения машинных частей и к которому уравнения Навье можно было бы приложить с некоторым успехом. Решение этого вопроса для предстоящего изучения совершенно необходимо, потому что представляет единственный путь для возможно правильного определения того влияния, какое оказывают свойства жидкости на величину силы трения. Этот вопрос, однако, подобно двум предыдущим, мы не можем решить на основании вполне дознанных и несомненных начал: уравнения Навье в приложении к этому частному случаю нельзя проинтегрировать без некоторой гипотезы относительно движения частиц жидкости. Правда, что гипотеза довольно правдоподобна, но для оценки ее значения нужны еще опыты, которых до сих пор не было сделано. Отсутствие этих опытов и было причиною, что предыдущий, довольно большой отдел получил свое место в этой статье. Приведенные в нем сравнения результатов опытов с результатами

вычислений, основанных на вероятных гипотезах относительно движения частиц жидкости, представляют аналогию с предстоящим решением вопроса и составляют единственное средство для оценки, в какой мере последующие выводы могут заслуживать внимания и доверия и какие следует предвидеть обстоятельства, способные нарушить согласие между явлениями, ожидаемыми на основании вычислений, и явлениями действительными.

68. В машинах в большинстве случаев трение является при таких обстоятельствах, что один цилиндр вращается внутри другого цилиндра, смазанного какою-нибудь жидкостью.

В недавнее время Макс Маргулес[1] применил формулы Навье для определения того участия, какое принимают внутреннее и внешнее трения жидкостей при вращении одного круглого цилиндра безграничной длины в другом подобном же цилиндре, если оси их обоих совпадают. Формулы, найденные Маргулесом, можно получить иным путем, чем им было сделано, помимо общих формул Навье.

Для вывода этих формул представим себе, что два круглых цилиндра безграничной длины имеют одну и ту же геометрическую ось вращения и что кольцевое пространство между внутренним и наружным цилиндром заполнено какою-нибудь однородною жидкостью, более или менее сильно прилипающею к поверхностям того и другого цилиндра. Вращение внутреннего цилиндра около его геометрической оси, если бы только жидкость вовсе к нему не прилипала, не вызвало бы никакого движения жидкости относительно наружного цилиндра; напротив, если бы жидкость, прилипая к внутреннему, вовсе не прилипала к наружному цилиндру, то вся масса жидкости

---

[1] Sitzungsber. d. Kgl. Akad. Wissensch., Bd. LXXXIII, II Abt. März-Heft, Jahrg. 1881. Ueber die Bestimmung des Reibungs- und Gleitungscoefficienten aus ebenen Bewegungen einer Flüssigkeit.

стала бы вращаться вместе с внутренним цилиндром относительно наружного. Если бы на цилиндры и жидкость не действовали никакие другие силы, кроме сил сцепления частиц жидкости между собою и с прилегающими цилиндрами, то равномерное вращение цилиндра внутри неприлипающей к нему жидкости, точно так же как и равномерное вращение цилиндра, окруженного прилипающею к нему жидкостью, внутри другого цилиндра, окружающего жидкость, но не прилипающего к ней, могло бы совершаться без участия посторонней силы, поддерживающей это равномерное движение.

Но в тех случаях, когда жидкость прилипает к тому и другому цилиндру и когда быстро вращающийся цилиндр, увлекая прилипшую к нему жидкость, стремится при ее посредстве увлечь другой, медленно вращающийся цилиндр, неодинаковые равномерные вращения этих двух цилиндров могут совершаться не иначе, как при содействии внешних сил, увлекающих один и задерживающих другой цилиндр. Величины этих последних сил будут зависеть от сил сцепления, или прилипания, или внутреннего трения жидкости, и от сил прилипания жидкости к тому и другому цилиндру, или от сил внешнего трения жидкости.

Для простоты дальнейших суждений представим себе, что наши цилиндры имеют вертикальную ось, что наружный цилиндр вовсе не двигается, а внутренний вращается по направлению часовой стрелки. Вращение внутреннего цилиндра увлечет непосредственно прилегающий к нему слой жидкости, этот слой увлечет следующий и т. д., и притом каждый слой увлекается предыдущим и задерживается последующим, Наружный слой жидкости будет задерживаться наружным цилиндром. Все частицы жидкости и все действующие на них силы располагаются при этом движении совершенно симметрично относительно оси вращения цилиндра; поэтому если вообразим себе внутри жидкости цилиндрические поверхности, у которых оси будут совпадать с осью внутреннего и внешнего

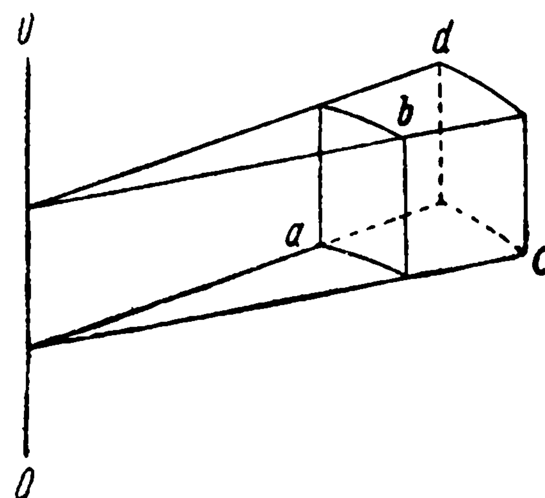
цилиндров, то все частицы жидкости, лежащие на одной и той же воображаемой цилиндрической поверхности, будут находиться в совершенно одинаковых условиях и, стало быть, все будут вращаться около оси с одинаковыми скоростями.

Все частицы жидкости, лежащие на другой, подобной же цилиндрической поверхности, будут иметь свою общую скорость, и если вторая поверхность будет внутри первой, то скорость частиц, лежащих на ней, будет больше скорости частиц, лежащих на первой поверхности. Частицы жидкости, лежащие на этих двух поверхностях, образуют, следовательно, два цилиндрических слоя неизмеримо малой величины. Понятно, что как бы мало ни было расстояние между наружным и внутренним цилиндрами, другими словами, как бы ни был тонок слой ограниченной ими жидкости, всегда можно будет подразделить его на множество неизмеримо тонких слоев, которые будут двигаться один относительно другого, вращаясь около общей им геометрической оси. Если во время установившегося движения жидкости ее действительно можно будет рассматривать как бы состоящею из множества бесконечно тонких цилиндрических слоев, вставленных один в другой, то, на основании гипотезы Ньютона, нетрудно будет определить влияние внутреннего и внешнего трения жидкости на величину момента внешних сил, вращающих внутренний цилиндр.

69. Для этого в безгранично тонком вращающемся цилиндрическом слое жидкости выделим элемент (фиг. 2), ограниченный двумя цилиндрическими поверхностями, общими всему слою, двумя бесконечно близкими плоскостями, перпендикулярными к оси слоя, и двумя плоскостями, проходящими через ось слоя и составляющими бесконечно малый угол.

На поверхности элемента будут действовать разные силы. На цилиндрические поверхности ab и cd, точно так же как на все остальные плоские поверхности ac, bc, ad, bd, будут действовать некоторые нормальные силы, пропорциональные

величинам этих поверхностей, а точки приложения этих сил можно будет рассматривать в центральных точках этих поверхностей. Цилиндрические поверхности *ab* и *cd* будут иметь некоторые движения относительно прилегающих слоев жидкости по направлениям, перпендикулярным к оси вращения, и так как выделенный элемент жидкости не имеет никакого движения, параллельного оси вращения, то силы прилипания или трения, действующие на эти два элемента поверхности, находясь в плоскостях, касательных к элементам, будут направлены перпендикулярно к оси вращения.



Фиг. 2

Плоские элементы поверхностей *ac* и *bd* отделяют рассматриваемый элемент жидкости от таких частей бесконечно тонкого цилиндрического слоя жидкости, которые, двигаясь постоянно вместе с элементом и всегда сохраняя взаимные относительные положения, никогда не представляют стремления к относительному перемещению по направлениям, параллельным плоскостям *ac* и *bd*, и сами плоские элементы вовсе не изменяют своего относительного положения; поэтому на элементы *ac* и *bd* не будут действовать какие бы то ни было силы, им параллельные.

На поверхностях элементов *ad* и *bc* развиваются силы, им параллельные, без которых элемент жидкости, подверженной действию вышеописанных сил, приложенных касательно к цилиндрическим элементам *ab* и *cd*, не мог бы оставаться в равновесии и стал бы вращаться около некоторой вертикальной оси. Касательные силы, приложенные к элементам *ab* и *cd*, будут находиться в одних и тех же плоскостях, перпендикулярных к оси вращения цилиндров.

Чтобы проще определить соотношение между перечисленными силами, действующими по направлениям касательных

к поверхностям элемента жидкости, представим на фиг. 3 разрез элемента жидкости $abcd$ плоскостью OO, перпендикулярною к оси вращения цилиндров.

На этой фигуре точка O представляет проекцию оси вращения OO на нашу плоскость: дуги nn' и mm' представляют проекции цилиндрических поверхностей ab и cd, и прямые nm и $n'm'$ — проекции плоскостей ad и bc.

70. При посредстве этой фигуры силы сцепления или трения определятся на основании гипотезы Ньютона и из условий равновесия сил, действующих на элемент жидкости и направленных параллельно взятой нами плоскости, проведенной перпендикулярно к оси вращения.

Назовем:

r — радиус цилиндрической поверхности nn', ограничивающей слой жидкости с внутренней его стороны, обращенной к оси вращения;

$r+dr$ — радиус наружной поверхности mm';

$d\alpha$ — угол между плоскостями On и On', проходящими через ось вращения, ограничивающими наш элемент с двух его боков;

dz — расстояние между плоскостями, ограничивающими элемент жидкости сверху и снизу;

p — нормальное давление на единицу поверхности в точке a (фиг. 2) или в точке n (фиг. 3).

В таком случае нормальное давление, приходящееся на единицу какой-нибудь поверхности в точке d (фиг. 2) или в точке m (фиг. 3), будет, вообще говоря, отличаться от величины p настолько, насколько оно изменится в зависимости от изменения радиуса r, т. е. будет

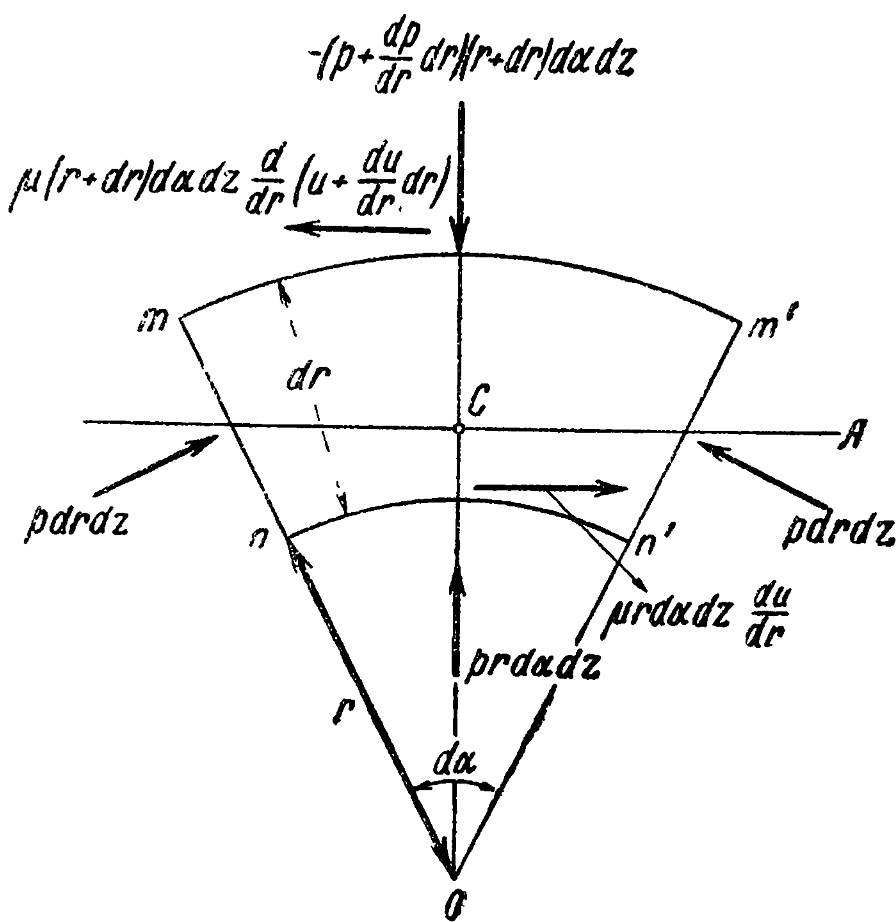
$$p+\frac{dp}{dr}\,dr.$$

Направление силы p будет от O к C, а сила $p+\frac{dp}{dr}dr$ будет направлена от C к O.

Если назовем Δ вес единицы объема жидкости, то центробежная сила элемента жидкости при скорости вращения u будет

$$\frac{\Delta\, r\, d\alpha\, dr\, dz}{g}\,\frac{u^2}{r}.$$

Нормальные давления, приходящиеся на единицу поверхности элементов ad или nm и ab или nn', будут одинаковы, так как оба эти элемента поверхности проходят через одну и ту же точку a или n; и так как нормальное давление, приходящееся на элементы цилиндрической поверхности, описанной одним и тем же радиусом r, не изменяется при изменениях угла α, то и на поверхности bc (фиг. 2) или $n'm'$ (фиг. 3) будет действовать нормальное давление на единицу, одинаковое с действующим на поверхностях ab и ad (фиг. 2), т. е. на всех трех поверхностях ab, ad и bc (фиг. 2) будет p.



Фиг. 3

71. Силы трения, действующие на поверхностях nn' и mm' (фиг. 3), определятся на основании гипотезы Ньютона, когда определим предел отношения изменения скорости вращения цилиндрических слоев к изменению радиуса. Так как цилин-

дрические поверхности только вращаются и никаких других движений не имеют, то достаточно рассмотреть дуги nn' и mm' (фиг. 3), лежащие на цилиндрических поверхностях в пересекающей их плоскости, проведенной перпендикулярно к оси. Если бы дуги nn' и mm' вращались так, как будто они принадлежат одному и тому же твердому телу, вовсе не перемещаясь одна относительно другой, то перемещение какой-нибудь точки n (фиг. 3), описывающей круг радиусом r в течение бесконечно малого времени dt с угловою скоростью ω, было бы

$$r\omega dt,$$

а перемещение точки m, описывающей круг радиусом $r+dr$ в течение того же времени dt, было бы

$$(r+dr)\omega dt = r\omega dt + \omega dr\, dt.$$

Разница в величинах перемещений этих точек есть

$$\omega dr\, dt.$$

Разница в скоростях этих точек или изменение скорости вращения при переходе от одной точки к другой есть

$$\omega dr,$$

а предел отношения этой величины к dr, очевидно, есть ω. Если же цилиндрические слои не составляют твердого тела, если угловые скорости вращения дуг nn' и mm' около оси O не одинаковы и изменяются при изменении радиуса, то, когда радиусу r соответствует угловая скорость ω радиусу $r+dr$ будет соответствовать угловая скорость

$$\omega + \frac{d\omega}{dr}dr,$$

и в таком случае перемещение дуги mm' в течение времени dt будет

$$(r+dr)\left(\omega+\frac{d\omega}{dr}dr\right)dt=r\omega\,dt+r\frac{d\omega}{dr}dr\,dt+$$
$$+\omega\,dr\,dt+\frac{d\omega}{dr}dr^2\,dt.$$

Теперь разница в величинах перемещений дуг mm' и nn' есть уже

$$\left(r\frac{d\omega}{dr}dr+\omega\,dr+\frac{d\omega'}{dr}dr^2\right)dt,$$

разница в величинах их скоростей есть

$$r\frac{d\omega}{dr}dr+\omega\,dr+\frac{d\omega}{dr}dr^2,$$

а предел отношения этого изменения к dr при безграничном стремлении dr к нулю есть

$$r\frac{d\omega}{dr}+\omega.$$

Вычитая отсюда предел изменения скорости, найденный для твердого тела, где нет никакого относительного перемещения частиц, а следовательно, и скольжения, вызывающего трение, получим величину относительной скорости, от которой зависит трение; эта скорость будет

$$r\frac{d\omega}{dr}+\omega-\omega=r\frac{d\omega}{dr}.$$

Назовем u скорость вращения жидкости в какой-нибудь ее точке, удаленной от оси вращения на величину радиуса r; тогда известно, что

$$u=\omega r \quad \text{или} \quad \omega=\frac{u}{r}$$

и, следовательно,

$$\frac{du}{dr} = r\frac{d\omega}{dr} + \omega,$$

или

$$r\frac{d\omega}{dr} = \frac{du}{dr} - \frac{u}{r}. \qquad (G)$$

Следовательно, в точках жидкости, удаленных от оси вращения на расстояние r, скольжение, направленное перпендикулярно к радиусу, будет пропорционально величине

$$\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}, \qquad (H)$$

а когда расстояние от оси увеличится на величину dr, тогда надо будет брать

$$\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} + \frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)dr. \qquad (K)$$

Пользуясь этими выражениями, можно написать величины сил трения, развивающихся на поверхностях ab и cd (фиг. 2) или соответствующих линиям nn' и mm' (фиг. 3).

Величина силы, действующей касательно к дуге nn' (фиг. 3), если обозначить попрежнему через μ коэффициент внутреннего трения, будет

$$\mu\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) r\, d\alpha\, dz, \qquad (L)$$

а величина силы, направленной по касательной к дуге mm', будет

$$\mu\left[\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} + \frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)dr\right](r + dr)\, d\alpha\, dz,$$

или

$$\mu\left[\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} + \frac{d^2u}{dr^2}dr - \frac{r\frac{du}{dr} - u}{r^2}dr\right](r + dr)\, d\alpha\, dz.$$

Останавливаясь в этом выражении на величинах не выше третьего. порядка, получим

$$\mu\left(\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}\right) r\, d\alpha\, dz + \mu r \frac{d^2u}{dr^2} dr\, d\alpha\, dz. \qquad (M)$$

Чтобы определить знаки перед формулами (L) и (M) сообразно с принятым знакоположением для того или другого направления, надо припомнить, что рассматриваемое вращение жидкости происходит по направлению часовых стрелок, что внутренние слои увлекают наружные, а наружные слои задерживают внутренние. Отсюда следует, что направление силы, приложенной к элементу nn' (фиг. 3) и выраженной формулою (L), будет слева направо, значит, по принятому обычаю, эта сила должна быть выражена положительным числом; сила же, приложенная по направлению касательной к дуге mm', будет направляться справа налево и должна быть выражена числом отрицательным.

Знак, соответствующий числу, выраженному формулою (L), зависит от знака величины $\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}$, так как все остальные множители суть величины положительные; что же касается знака, соответствующего числам, выражаемым последнею формулою, то из уравнения (G) нетрудно удостовериться, что это числа отрицательные. Действительно, в разбираемом случае угловая скорость ω уменьшается по мере увеличения радиуса r, следовательно $\frac{d\omega}{dr}$ есть величина отрицательная. Отсюда видно, что формулы (L) и (M) доставляют числа отрицательные, и, следовательно, чтобы эти формулы выражали величины и направления сил, приложенных к поверхностям nn' и mm', надо перед формулою (L) поставить знак минус, а формулу (M) надо оставить с тем знаком, как она есть.

Силы, действующие касательно к элементам nm и $n'm'$, определятся, во-первых, из того обстоятельства, что вследствие

расположения частиц жидкости круговыми цилиндрами силы, действующие по направлению всех радиусов, должны быть одинаковы. Какая сила действует по линии nm (фиг. 3) на элемент $nmn'm'$, точно такая же и также относительно оси направленная сила будет действовать вдоль линии $n'm'$ на элемент, лежащий рядом с рассматриваемым, но правее его. Если вдоль линии nm действует сила δ по направлению от n к m, то действие рассматриваемого элемента на соседний элемент, лежащий правее, будет направлено вдоль $n'm'$, тоже от n' к m', и величина его будет тоже δ. Следовательно, на элемент $nmn'm'$ вдоль линии $n'm'$ будет действовать сила δ, направленная от m' к n'. Величина силы δ определится из уравнения моментов всех сил, приложенных к граням nn', nm, mm' и $n'm'$.

Моменты этих сил относительно средней точки c будут:

а) Все нормальные давления, приложенные к граням, и центробежная сила проходят через точку c, следовательно моменты их — нули.

б) Момент силы, приложенной к грани nn', получится после умножения формулы (L), взятой, как было уже говорено выше, со знаком минус, на $-\frac{dr}{2}$; следовательно, будет

$$\mu\left(\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}\right)\frac{r}{2}d\alpha\, dr\, dz.$$

в) Момент силы, приложенной к грани mm', будет произведение формулы (M) на $\frac{dr}{2}$, т. е.

$$\mu\left(\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}\right)\frac{r}{2}d\alpha\, dr\, dz+\mu\,\frac{r}{2}\,\frac{d^2u}{dr^2}\,dr^2 d\alpha\, dz.$$

г) Сумма моментов сил δ, приложенных к граням nm' и $n'm'$, будет

$$\delta\left(r+\frac{dr}{2}\right)d\alpha.$$

Сумма всех этих трех формул должна представлять нуль; следовательно

$$\delta r\,d\alpha + \delta\,\frac{dr}{2}\,d\alpha = -\mu\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) r\,d\alpha\,dr\,dz - \mu\,\frac{r}{2}\,\frac{d^2u}{dr^2}\,dr^2 d\alpha\,dz;$$

отсюда тотчас же оказывается, что по линии nm в направлении от n к m действует сила

$$\delta = -\mu\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) dr\,dz, \qquad (N)$$

следовательно по линии $n'm'$ действует сила

$$\mu\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) dr\,dz. \qquad (O)$$

Последнее уравнение, нужное нам, чтобы найти зависимость между скоростями в разных точках жидкости и расстояниями этих точек от оси вращения, можно получить, взяв сумму проекций всех сил, действующих на элемент жидкости, на направление касательной к кругу, описанному из центра O радиусом OC, проведенной через точку C. Эти проекции будут:

а) Нормальных давлений на элементы nn' и mn', точно так же как и центробежной силы, равны нулю.

б) Проекция силы, приложенной к поверхности nn', выражается формулою (L) со знаком минус, т. е.

$$-\mu\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) r\,d\alpha\,dz.$$

в) Проекция силы, приложенной к элементу поверхности mm', выражается формулою (M), т. е.

$$\mu\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) r\,d\alpha\,dz + \mu r\,\frac{d^2u}{dr^2}\,dr\,d\alpha\,dz.$$

г) Проекции сил δ, приложенных к элементам nm' и $n'm'$, получатся после умножения найденных для них выражений

на синус половины угла $d\alpha$, причем не следует упускать из виду что углы, откладываемые от линии OC вправо, положительные и влево — отрицательные. Поэтому проекция силы, приложенной к nm, будет

$$\mu\left(\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}\right)\sin\frac{d\alpha}{2}dr\,dz,$$

а проекция силы, приложенной к $n'm'$, будет тоже

$$\mu\left(\frac{du}{dr}-\frac{u}{r}\right)\sin\frac{d\alpha}{2}dr\,dz.$$

Сумма всех четырех последних выражений должна быть равна нулю. Складывая эти формулы, следует заметить, что, вместо $\sin\frac{d\alpha}{2}$, можно написать с точностью до величин третьего порядка просто $\frac{d\alpha}{2}$.

Сложение тотчас же дает уравнение

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=0,$$

полученное впервые Максом Маргулесом.[1]

Общий интеграл этого уравнения, как легко убедиться, есть

$$u=\frac{C}{r}+C'r, \tag{13}$$

где C и C' суть произвольные постоянные, определяемые из условий, относящихся к границам жидкости на поверхностях ее прикосновения с твердыми цилиндрами.

Для определения произвольных постоянных C и C' надо рассмотреть условия равновесия бесконечно малого элемента жидкости $nn'mm'$ (фиг. 3), когда он будет находиться в при-

[1] *Max Margules.* Ueber die Bestimmung des Reib- und Gleitungscoefficienten, S. 12.

косновении с наружным или с внутренним твердым цилиндром. Назовем:

r_2 — внутренний радиус наружного цилиндра;

U_2 — скорость вращения наружного цилиндра в направлении часовых стрелок на окружности, описанной радиусом r_2;

u_2 — скорость вращения жидкости, находящейся в непосредственном прикосновении с наружным цилиндром.

В таком случае жидкость будет скользить [5] по стенке цилиндра со скоростью

$$u_2 - U_2.$$

Величина силы трения, приложенной к элементу mm' (фиг. 3), обозначая λ_2 коэффициент внешнего трения жидкости, будет

$$\lambda_2 (u_2 - U_2) r_2 d\alpha dz.$$

Направление этой силы будет противоположно направлению движения жидкости, следовательно сила, приложенная к жидкости, должна выражаться числом отрицательным. Если наружный цилиндр увлекается жидкостью, то его скорость

$$U_2 < u_2;$$

следовательно сила, действующая на элемент mm', по величине и направлению выразится формулою

$$\lambda_2 (U_2 - u_2) r_2 d\alpha dz.$$

Что касается сил, приложенных к поверхностям nn', nm и $n'm$, то они получатся из формул (L), (N) и (O), если только в них на место r будет поставлено $r_2 - dr$.

Такая подстановка доставит, во-первых, те же формулы, с тою лишь разницей, что в них на место r будет r_2, и во-вторых,— новые члены третьего и высших порядков. Эти последние члены вовсе не нужны для предстоящего вывода, и потому

сумма проекций всех сил, взятых на направлении линии CA (фиг. 3) даст уравнение

$$\lambda_2 (U_2 - u_2) r_2 d\alpha dz - \mu \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)_{r=r_2} r_2 d\alpha dz + $$
$$+ \mu \left(\frac{du'}{dr} - \frac{u}{r}\right)_{r=r_2} dr\, d\alpha\, dz = 0,$$

откуда

$$\lambda_2 (U_2 - u_2) = \mu \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)_{r=r},$$

а так как на основании уравнения (13)

$$\frac{du}{dr} = -\frac{C}{r^2} + C'$$

и

$$-\frac{u}{r} = -\frac{C}{r^2} - C',$$

то

$$\lambda_2 (U_2 - u_2) = -2\mu \frac{C}{r^2}. \tag{14}$$

Поступая подобно только что изложенному, можно рассмотреть условия равновесия бесконечно малого элемента жидкости $nn'mm'$ (фиг. 3), когда он прикасается своею стороной nn' к внутреннему цилиндру. Назовем:

r_1 — наружный радиус этого цилиндра;

U_1 — скорость вращения внутреннего цилиндра по направлению часовых стрелок на окружности, описанной радиусом r_1;

u_1 — скорость вращения жидкости, прилегающей к внутреннему цилиндру и увлекаемой им.

Тогда сила трения, приложенная к элементу nn' (фиг. 3) по касательной к этому элементу, направленная вправо, будет

$$\lambda_1 (U_1 - u_1) r_1 d\alpha dz, \tag{15}$$

если через λ_1 обозначить коэффициент трения жидкости к внутреннему цилиндру.

Для определения сил трения, приложенных к элементам mm', nm и $n'm'$, достаточно подставить в формулы (L) и (O) вместо r величину $r_1 + dr$ и заметить, что теперь формула (L) выражает силу трения, направляющуюся влево, и, следовательно, должна дать число отрицательное. Это замечание указывает, что знак перед формулой (L) менять не надо.

Подстановка $r_1 + dr$ вместо r в формулах (L) и (O) доставит возможность, подобно вышеприведенному, написать сумму проекций всех сил, действующих на элемент жидкости, взятых на направлении CA, в виде

$$\lambda_1 (U_1 - u_1) r_1 d\alpha dz + \mu \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)_{r=r_1} r_1 d\alpha dz + \\ + \mu \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right) dr\, d\alpha dz = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 (U_1 - u_1) = -\mu \left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)_{r=r_1},$$

и на основании уравнения (13)

$$\lambda_1 (U_1 - u_1) = 2\mu \frac{C}{r_1^2}.$$

Таким образом получим два уравнения

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 (U_2 - u_2) &= -2\mu \frac{C}{r_2^2}, \\ \lambda_1 (U_1 - u_1) &= -2\mu \frac{C}{r_1^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Величины u_2 и u_1 на основании уравнения (13) будут

$$u_2 = \frac{C}{r_2} + C' r_2, \qquad u_1 = \frac{C}{r_1} + C' r_1;$$

вставляя эти выражения u_2 и u_1 в два предыдущие уравнения, получим

$$\lambda_2\left(U_2-\frac{C}{r_2}-C'r_2\right)=-2\mu\frac{C}{r_2^2}$$

и

$$\lambda_1\left(U_1-\frac{C}{r_1}-C'r_1\right)=2\mu\frac{C}{r_1^2},$$

или

$$C\left(\frac{1}{r_2}-\frac{2\mu}{\lambda_2 r_2^2}\right)+C'r_2=U_2$$

и

$$C\left(\frac{1}{r_1}+\frac{2\mu}{\lambda_1 r_1^2}\right)+C'r_2=U_1.$$

Эти два уравнения первой степени относительно C и C' дают

$$\left.\begin{aligned} C&=\frac{r_1^2\,r_2^2\,(U_1r_2-U_2r_1)}{r_1\,r_2\,(r_2^2-r_1^2)+2\mu\left(\dfrac{r_2^3}{\lambda_1}+\dfrac{r_1^3}{\lambda_2}\right)} \\ &\text{и} \\ C'&=\frac{r_2^2\,U_2\left(r_1+\dfrac{2\mu}{\lambda_1}\right)-r_1^2\,U_1\left(r_2-\dfrac{2\mu}{\lambda_2}\right)}{r_1\,r_2\,(r_2^2-r_1^2)+2\mu\left(\dfrac{r_2^3}{\lambda_1}+\dfrac{r_1^3}{\lambda_2}\right)}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Стоит подставить эти два выражения в уравнение (13), и мы получим возможность определить скорости каких угодно точек жидкости; а так как траектории этих точек уже определены (на основании сделанной гипотезы это суть постоянные круги), то движение жидкой массы сделалось нам вполне известным, а следовательно могут быть определены и силы трения.

72. Чтобы проверить правильность допускаемой гипотезы и степень точности в определении сил трения, надо проверить

результаты вычислений каким-нибудь опытом, относящимся к этому движению. Для этой цели лучше всего будет определить опытом и вычислением величину суммы моментов сил трения, приложенных от жидкости к внутреннему цилиндру при спокойном состоянии внешнего цилиндра.

Сила трения, приложенная к какому-нибудь элементу поверхности цилиндра, вращающегося внутри жидкости, выражается формулой (15), которая при посредстве уравнения (16) обращается в

$$2\mu \frac{C}{r_1} d\alpha\, dz.$$

Момент этой элементарной силы относительно оси вращения цилиндра получится после умножения приведенной величины силы на длину радиуса цилиндра, следовательно будет

$$2\mu\, C\, d\alpha\, dz.$$

Сумма всех элементарных моментов сил трения, приложенных на всей поверхности цилиндра и сопротивляющихся его вращению, получится после интегрирования последней формулы: относительно α в пределах от 0 до 2π и относительно z в пределах от $z = 0$ до $z = h$, если h — длина цилиндра.

Обозначим через M сумму моментов всех сил трения, или только что упомянутый интеграл. Тогда, очевидно,

$$M = 4\mu\pi h C,$$

а вставляя на место C вторую часть равенства из уравнения (17), получим, что

$$M = 4\mu\pi h \frac{r_1^2\, r_2^2\, (U_1 r_2 - U_2 r_1)}{r_1 r_2 \left(r_2^2 - r_1^2\right) + 2\mu \left(\frac{r_2^3}{\lambda_1} + \frac{r_1^3}{\lambda_2}\right)}.$$

Если же наружный цилиндр вовсе не будет двигаться, как в большинстве случаев и бывает, то

$$U_2 = 0,$$

и тогда

$$M = 4\mu\pi h \frac{r_1^2 r_2^3 U_1}{r_1 r_2 (r_2^2 - r_1^2) + 2\mu \left(\frac{r_2^3}{\lambda_1} + \frac{r_1^3}{\lambda}\right)}. \qquad (18)$$

Величину этого момента останется только сравнить с величиной суммы моментов сил, действительно вращавших во время опытов внутренний цилиндр и поддерживавших равномерную скорость U_1 на его поверхности.

73. Ряд опытов, сделанных при разных скоростях U_1 и в особенности с цилиндрами различных радиусов, мог бы привести и к проверке принятой гипотезы и к определению коэффициентов μ, λ_1 и λ_2. Определение коэффициентов λ_1 и λ_2 будет тем труднее, чем более будут они превосходить величину μ; но зато, чем больше будут величины λ_1 и λ_2 сравнительно с величиною μ, тем меньше будет их влияние на величину момента M. Следовательно, для жидкостей, сильно прилипающих к твердым телам, для которых λ_1 и λ_2 будут очень велики, трудно будет определить этими опытами их величины, но это незнание не будет препятствовать довольно точному определению величины момента M и величины коэффициента μ.

С первого взгляда может казаться, что можно делать опыты с сосудами каких угодно радиусов, или лучше сказать, с цилиндрами, у которых радиусы r_2 и r_1 различаются как угодно много или мало. Такой взгляд будет, однако, по всему вероятию, ошибочен. Принятая гипотеза, допускающая, что частицы жидкости, лежащие в какой-нибудь данный момент времени на поверхности какого-нибудь круглого цилиндра, имеющего ось, общую с цилиндрами, окружающими жидкость, остаются на той же поверхности во все время опыта, едва ли будет оди-

наково хорошо применима как в случаях очень тонких слоев жидкости, так и в случаях очень толстых слоев ее. Судя по опытам над трубками, представляется более вероятным, что при небольших разницах между r_2 и r_1 гипотеза будет ближе к истине, чем при больших различиях между r_2 и r_1. Очень может быть, что в этих последних обстоятельствах будут развиваться водовороты и разрывы жидкости, которые увеличат пути, проходимые частицами жидкости, и приведут выражение момента сил трения M к формуле, зависящей уже не от первой степени скорости U_1, а, подобно тому как в трубках или каналах, к формуле, зависящей от первой степени и от квадрата.

Во всяком случае надо сказать, что до настоящего времени еще не опубликованы опыты, которыми можно было бы воспользоваться в большей или меньшей степени для проверки формулы (18).

Опыты Гельмгольца и Пиотровского дают надежду, что и формула (18) будет достаточно верна, по крайней мере при малых разностях:

$$r_2 - r_1 = e.$$

В тех случаях, когда толщина жидкого слоя e будет чрезвычайно мала сравнительно с величинами радиусов r_2 и r_1, формулу можно будет значительно упростить, если только ввести в нее величину e и если отбросить члены, содержащие квадраты или кубы e, которые будут в таком случае очень малы.

Если ограничимся тою точностью, которая соответствует равенствам

$$r_2^2 = r_1(r_1 + 2e) \qquad \text{и} \qquad r_2^3 = r_1^2(r_1 + 3e),$$

то, вместо уравнения (18), получим

$$M = \mu 2\pi h \frac{r_1^2 (r_1 + 2e) U_1}{(r_1 + e) e + \mu \left(\frac{r_1 + 3e}{\lambda_1} + \frac{r_1}{\lambda_2} \right)},$$

а если величина $3e$ будет ничтожна сравнительно с величиною r_1, то — еще более простое уравнение

$$M = \mu \frac{2\pi r_1 h U_1}{e + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}} r_1.$$

Сила трения двух смазанных цилиндров, как ее обыкновенно понимают и которую назовем F, определится из предыдущего момента M простым делением его на r_1; следовательно

$$F = \mu \frac{2\pi r_1 h U_1}{e + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}},$$

или

$$F = \frac{2\pi r_1 h U_1}{\frac{e}{\mu} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}}.$$

Если обозначим буквою Q полную поверхность прикосновения внутреннего цилиндра с жидкостью, то

$$2\pi r_1 h = Q$$

и, следовательно, [6]

$$F = \mu \frac{Q U_1}{e + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}}. \tag{19}$$

Отсюда оказывается, что *при постоянной температуре смазывающей жидкости сила трения двух смазанных цилиндров пропорциональна коэффициенту внутреннего трения жидкости, соответствующему данной температуре, пропорциональна величине поверхности взаимного прикосновения трущихся твердых тел и пропорциональна первой степени относительной скорости этих тел на их поверхности прикосновения: она обратно пропорциональна сумме, состоящей из толщины слоя смазывающей жидкости и из суммы отношений коэффициента*

внутреннего трения к коэффициентам внешнего трения жидкости при данной температуре.

Об этом уравнении (19) надо в особенности помнить, что оно применимо только в тех случаях, когда движение жидкости происходит так, как будто бы она состояла из безгранично тонких, круглых цилиндрических слоев с одною общею осью, совпадающею с осью твердых цилиндров, подобно тому как в трубках Пуазейля, Гагена и Якобсона, с тою только разницею, что в трубках слои жидкости, не смешиваясь один с другим, двигались параллельно оси, вовсе не вращась около нее, а здесь слои вращаются около оси, вовсе не двигаясь вдоль нее. Если же движение жидкости будет более сложно, если истинные скорости относительных движений жидких частиц будут больше, чем в случае предположенного движения, или если пути, проходимые точками приложения сил внутреннего трения, будут больше того, что соответствует принятой гипотезе, то сила сопротивления вращению внутреннего цилиндра будет более силы F, определенной уравнением (19). Если, несмотря на отступление истинного движения от предполагаемого, захотели силу трения, определяемую опытом, выражать формулою, пропорциональною поверхности прикосновения твердого тела с жидкостью и зависящею от скорости на поверхности внутреннего цилиндра при покойном состоянии внешнего цилиндра, то скорость должна будет входить не в первой, а в какой-нибудь другой, более высокой степени. Подтверждение этого соображения уже и представляют опыты Д. И. Менделеева и Кузминского,[1] в которых слой воды имел довольно большую толщину и на основании которых оказалось, что

$$F = 0.14 Q U_1^2 \text{ кг.}$$

74. Уравнение (19) показывает, что влияние коэффициентов внутреннего и внешнего трения жидкости не одинаково. В тех

[1] Журн. Русск. физ.-хим. об-ва, т. XIV, в. 5, стр. 209.

случаях, когда отношения коэффициента внутреннего трения μ к коэффициентам внешнего трения λ_1 и λ_2 будут величины очень малые, подобно тому как для воды и стекла (см. § 62), толщина слоя e жидкости легко может значительно превосходить сумму $\frac{\mu}{\lambda_1}+\frac{\mu}{\lambda_2}$. В таких случаях, останавливаясь на той степени точности, с какою суммою $\frac{\mu}{\lambda_1}+\frac{\mu}{\lambda_2}$ можно будет пренебречь перед величиною e, можно будет написать

$$F=\mu\frac{QU_1}{e}. \tag{19a}$$

Из этой формулы тотчас же видно, что сила трения как бы вовсе не зависит от внешнего трения и что она обратно пропорциональна толщине слоя e, т. е. тем больше, чем толщина слоя e меньше.

В других случаях, когда липкость между частицами жидкости μ будет больше и сравнительно с величинами λ_1 и λ_2 не будет ничтожна, но когда, напротив, величиною e можно будет пренебречь, сравнивая ее с суммою $\frac{\mu}{\lambda_1}+\frac{\mu}{\lambda_2}$, тогда с известной степенью точности можно будет написать

$$F=\frac{QU_1}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}},$$

и если бы случилось, что оба цилиндра сделаны из одного материала и что

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda,$$

то

$$F=\frac{\lambda}{2}UQ_1. \tag{19b}$$

Тут, очевидно, сила трения как бы вовсе не зависит ни от внутреннего трения жидкости, ни от толщины слоя, а только

от внешнего трения жидкости, развивающегося на поверхностях прикосновения с твердыми телами, и от скорости, при которой трение совершается.

Наконец, можно сказать, что внутреннее и внешнее трения будут влиять приблизительно одинаково в тех случаях, когда по свойствам жидкости и окружающих ее тел сумма $\frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}$ будет величина одного порядка с величиною толщины e слоя. Только при подобных обстоятельствах из опытов, предлагаемых Маргулесом, и можно будет определить коэффициенты внутреннего и внешнего трения.

75. Формула (19) и все из нее проистекающие относятся к некоторому идеальному случаю, интересному с теоретической точки зрения, никогда практически не осуществимому во всех его деталях, между прочим, потому что длина цилиндров предполагается безгранично большою.

Решая этот вопрос, надо было прежде всего заботиться об отыскании точного определения того влияния, какое имеют свойства жидкости на силу трения смазанных твердых тел, хотя бы условия, к которым относится строго решение, и не совпадали с обыкновенно встречающимися обстоятельствами. Такое решение нужно для того, чтобы, узнав влияние свойств жидкости в некоторых, вполне определенных и, если угодно, неосуществимых условиях, получить потом возможность определять его хотя бы не вполне точно, приблизительно, при других действительно встречающихся обстоятельствах, подходящих более или менее близко к идеальному случаю.

Результаты подобных теоретических выводов только тогда правильно прилагаются к каким-нибудь практическим вопросам, когда с достаточною ясностью и определенностью будет указано, в чем заключаются сходство и различие действительного и идеального случаев, и когда будет обнаружено, в какой мере каждое из обстоятельств, составляющих различие, может

иметь влияние на правильность применения теоретического вывода к данному частному случаю.

Поэтому, переходя к практическим применениям формулы (19), надо начать с перечисления всех обстоятельств, представляющих отличие условий трения машинных частей от тех условий, при которых были найдены формулы, и из существующих сведений, доставленных бывшими опытами и наблюдениями, указать хотя бы в общих чертах степень влияния каждого из обстоятельств, составляющих различие.

76. Сходство между явлениями трения, происходящими в смазанных машинных частях, и изученным нами идеальным явлением состоит в том, что во всех этих случаях некоторый круглый цилиндр вращается внутри другого, имеющего с ним одну и ту же ось.

Различие обыкновенно встречающихся явлений от идеального зависит от многих обстоятельств.

Наиболее резкая разница, бросающаяся в глаза, относится к длине цилиндров: в идеальном случае цилиндры предполагались безграничной длины, что в практических случаях составляет очевидную нелепость. Но разница в величине силы трения, проявляющейся при безгранично длинных цилиндрах и при цилиндрах с ограниченною длиной, состоит только в том, что в первом случае сцепление жидкости с поверхностями, к ней прилегающими, остается одно и то же для всех точек поверхности цилиндра, а во втором случае сцепление жидкости около концов цилиндра отличается от сцепления в остальных точках. Если, однако, принять во внимание почти неизмеримую малость длины радиуса сферы действия сил сцепления твердых и жидких тел, то можно тотчас же убедиться, что величины поверхностей машинных частей неизмеримо более тех частей их поверхностей, располагающихся около краев цилиндров, ширина которых равна длине радиусов сферы действия сил сцепления и для которых трение будет не одина-

ково с остальными. Средняя величина сил трения, приходящихся на единицу поверхности, когда будут приняты в расчет края и когда они не будут приняты, будет почти одна и та же.

Другое обстоятельство различия, тоже обнаруживаемое с первого взгляда и, вероятно, тоже не имеющее особо важного значения, — это отсутствие непрерывности цилиндрической поверхности обнимающего цилиндра в направлении, перпендикулярном к оси.

Известно, что подшипники почти всегда состоят из отдельных частей, да еще и в этих-то частях делают желобки для пропуска смазки. Около краев отдельных частей или желобков должны являться особые условия, подобные тем, о которых было только что сказано, говоря о влиянии ограниченной длины цилиндров. Но и здесь, точно так же как и там, площади поверхностей, находящихся под влиянием особых условий, слишком ничтожны сравнительно с величиною поверхности прикосновения между цапфами или шейками и их подшипниками или вкладышами. Влияние краев, параллельных с осью, может, однако, оказаться гораздо сильнее влияния краев, расположенных в плоскостях, перпендикулярных к оси, если только под влиянием этих продольных краев движение жидкости сделается более сложным, чем предполагалось при изучении идеального случая, когда допускали, что относительные перемещения могут происходить только по поверхностям цилиндров, имеющих одну общую ось.

Гораздо более сильное отличие обстоятельств, сопровождающих трение машинных частей, от идеального случая зависит от видимого непостоянства температуры, при которой трутся части машин. При выводе формул предполагалось, что температура смазывающего слоя жидкости одна и та же во всех его точках и остается без перемены во все время движения цилиндра. В действительных же явлениях она изменяема не только с течением времени, но и в одно и то же мгновение она различна в различных точках. Судя по свойствам

сурепного масла, исследованного О. Е. Мейером (§ 66), должно ожидать, что с изменением температуры смазывающего слоя будут изменяться и величины μ, λ_1 и λ_2 и что изменения эти могут быть даже очень велики; а чем больше будут они изменяться, тем большей может оказаться разница между результатами наблюдений над действительным явлением и результатами вычислений, сделанных в предположении, что температура не переменяется.

Наконец, менее заметное с первого взгляда, но вовсе не маловажное по своему влиянию значение представляют различия в условиях, определяющих толщину слоя смазки в идеальном случае и в действительных явлениях.

В идеальном случае толщиной смазывающего слоя была некоторая данная величина, одинаковая во всех его местах, ни от чего не зависящая, которую поэтому можно считать переменною независимою.

В действительных явлениях толщина слоя e никогда не бывает дана, ее нельзя даже измерить: во-первых, потому что она чрезвычайно мала и, так сказать, ускользает от прямого измерения, и, во-вторых, она далеко не везде одинакова: ее приходится определять каким-нибудь косвенным путем, и при этом она еще оказывается какою-то крайне сложною функцией множества обстоятельств. Строго говоря, толщина слоя смазки между машинными частями имеет особое значение для каждой точки на поверхности, например цапфы; поэтому в формулах (19), (19a) надо ставить не действительную величину e, а некоторую воображаемую — среднюю, найденную надлежащим образом для данного частного случая. Эту среднюю величину нам придется постоянно иметь в виду, о ней придется часто говорить; поэтому, в отличие от действительной величины e, назовем ε среднюю толщину смазывающего слоя, соответствующую данному частному случаю.

Следовательно, в применениях формул к каким-нибудь частным случаям, надо будет брать уже не уравнения (19),

(19а), а другие уравнения, по виду такие же, как и эти, но отличающиеся тем, что, вместо e, в них будет стоять ε. Эти уравнения будут

$$F = \mu \frac{QU_1}{\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}}, \tag{20}$$

$$F = \mu \frac{QU_1}{\varepsilon}. \tag{20a}$$

Величина ε, как уже сказано,— весьма сложная функция очень большого числа переменных независимых:

а) Во-первых, можно заметить, что смазываемые поверхности машинных частей не представляют, так сказать, математического соответствия одна другой: всегда есть некоторые выступы на одной, не соответствующие впадинам на другой. Правда, что эти выступы и впадины обыкновенно бывают чрезвычайно малы, так что при всей кажущейся ничтожности отступлений от правильной формы поверхности сравнительно с измерениями поверхности, отступлений, часто вовсе не видимых для глаза, они могут быть весьма велики сравнительно с толщиною смазывающего слоя, а потому местами могут или сильно увеличивать, или сильно уменьшать толщину этого слоя.

б) Вторым обстоятельством, определяющим толщину смазывающего слоя, можно поставить давление, стремящееся вытеснить смазку из занимаемого ею промежутка. Собственно говоря, еще не было опытов для определения зависимости между толщиною смазывающего слоя и давлением, приходящимся на квадратную единицу смазанной поверхности прикосновения машинных частей, но, повидимому, можно допустить, что толщина смазывающего слоя находится в зависимости от давления на квадратную единицу, и притом, что большим давлениям соответствуют меньшие толщины. По поводу этой зависимости можно сказать, что, чем подвижнее будет сама жидкость, чем меньше будут сцепления ее с окружающими ее

телами, тем легче она будет вытесняться; следовательно, если повышение температуры увеличит подвижность жидкости и уменьшит ее липкость, то это увеличение температуры послужит к уменьшению толщины слоя. Отсюда можно вывести заключение, что толщина слоя есть функция давления, приходящегося на квадратную единицу, и притом функция, уменьшающаяся при увеличении давления, и что она есть какая-то неизвестная еще функция μ, λ_1, λ_2 и температуры t.

в) Если давление обусловливает толщину слоя, то только наибольшую; оно не дает возможности смазке лежать слоем более толстым, но оно ничуть не мешает, чтобы слой смазки был сколько угодно тоньше. Если смазка будет доставляться к поверхности смазывания в недостаточном количестве для образования слоя наибольшей, возможной для нее, толщины, то она все-таки может размазаться по всей поверхности. Следовательно, толщина смазки зависит от количества, в котором ее будут доставлять.

г) В каком бы количестве смазка ни доставлялась, но если края смазанных частей, как, например, края самих подшипников или сделанных на них желобков, будут в большей или меньшей степени соскабливать смазку, лежащую на оси, то толщина смазывающего слоя будет уменьшаться. Следовательно, толщина ε есть некоторая функция формы краев подшипников и их бороздок.

д) Наконец, трущиеся части находятся обыкновенно под действием некоторых внешних сил, изменяющих форму этих частей. Эти изменения формы не всегда бывают одинаковы для обеих трущихся поверхностей; следовательно, изменение формы частей будет новою причиной несоответствия одной поверхности другой, и, чем больше будут внешние силы, тем большие деформации они произведут, тем большее несоответствие поверхностей может обнаружиться. Следовательно, средняя величина толщины слоя, обозначенная ε, зависит от величины сил, изменяющих форму трущихся поверхностей.

Этот перечень показывает, как много обстоятельств надо иметь в виду при сравнении результатов уравнений (20) или (20a) с результатами, относящимися к каким-нибудь действительным явлениям. Но и это еще не все; и во многих случаях придется обращать внимание на многие другие обстоятельства, способные обнаруживать более или менее серьезное влияние, о которых теперь говорить еще неуместно и о которых будет сказано далее (§ 77). Формулу (19) совсем нельзя применять к тем случаям действительных явлений, когда силы, приложенные к металлическим частям, прижимают их одну к другой настолько, что металлические поверхности начинают непосредственно действовать одна на другую.

Полному уничтожению смазывающего слоя препятствует некоторым образом пористость металлов. Смазка, проникая порами в глубину металлических частей, проводится потом такими же порами опять на поверхность.[1] Поэтому можно ожидать, что при движении машин полное отсутствие смазки может являться только в редких и исключительных случаях, но при больших давлениях или при недостаточном притоке смазывающей жидкости металлические поверхности могут оказываться в такой относительной близости, что действие молекулярных сил будет проявляться заметным образом и устранит применение уравнения (19). Чем меньше будут прижимающие силы и чем обильнее будет смазывание, тем скорее можно ждать согласия между фактами и формулою. Но как велико может быть влияние каждого из обстоятельств, обусловливающих среднюю толщину слоя смазки, можно будет судить из сравнения формул с опытами.

[1] Это свойство легко наблюдается на подшипниках, особенно если они подвергались сильному давлению; сняв подшипник с оси и вытерев его насухо, можно видеть без труда, как он тотчас же снова покрывается смазкою. Она, так сказать, на глазах выступает из пор, образуя довольно большие капли. В снятом подшипнике выступание смазки длится иногда в течение многих часов.

77. Полная величина силы трения, определяемая при известных обстоятельствах уравнения (20), необходимая для определения работы трения, не дает ответа на вопрос, сделано ли все для уменьшения этой вредной силы. Для оценки ее надо знать отношение между нею и какою-нибудь другою силой, действующею одновременно с нею и находящеюся в некоторой определенной зависимости от нее. Самым естественным и простым сравнением служит соотношение между силою трения и тем давлением, которое прижимает одну к другой трущиеся поверхности, действуя нормально к элементам этих поверхностей. Отношение силы трения к нормальному давлению, как известно, и называется коэффициентом трения.

Если P — полная величина нормального давления на трущиеся поверхности, f — коэффициент трения и F — сила трения, то

$$F = fP.$$

Много было сделано опытов для определения величины f, соответствующей машинным частям. Ими придется пользоваться и для проверки практической применимости уравнения (20), определяющего силу трения в зависимости от различных обстоятельств. Поэтому и уравнение (20) надо так преобразовать, чтобы выражаемая им сила трения представилась в виде произведения коэффициента трения на величину нормального давления.

Для этой цели вторую часть равенства (20) умножим и разделим на ту величину нормального давления P, которое прижимает трущиеся поверхности, и заметим, что в большинстве случаев можно считать нормальное давление P равномерно размещенным по всей поверхности Q взаимно трущихся тел. Назовем p нормальное давление, приходящееся на квадратную единицу поверхности. В таком случае уравнение (20) получит вид

$$F = \mu \frac{U_1 P}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}\right) p}.$$

Простое сравнение этого уравнения с предыдущим тотчас же показывает, что коэффициент трения равен

$$f=\frac{\mu U_1}{\left(\varepsilon+\frac{\mu}{\lambda_1}+\frac{\mu}{\lambda_2}\right)p}, \tag{21}$$

а если бы трение жидкой смазки относительно металлических поверхностей было гораздо больше внутреннего трения жидкости, если бы λ_1 и λ_2 были несравненно больше μ, то, пользуясь уравнением (20а), нашли бы, что

$$f=\mu\frac{U_1}{\varepsilon p}. \tag{21a}$$

То ли, другое ли уравнение будет применимо, во всяком случае коэффициент трения f оказывается функциею большого числа переменных независимых.

Он зависит от U_1, p, μ, λ_1, λ_2 и ε, а четыре последние величины сами зависят от многих обстоятельств: все они для разных смазывающих жидкостей при других обстоятельствах будут иметь особые значения, все будут зависеть от температуры, при которой будет находиться слой смазки, которая в свою очередь будет зависеть от количества развивающейся теплоты, от теплопроводности трущихся частей и от температуры в атмосфере. Сверх того, величины λ_1 и λ_2 будут зависеть от свойств трущихся твердых тел, а ε будет зависеть от того несоответствия поверхностей, которое окажется при их пригонке, от деформации этих поверхностей под влиянием сил, действующих на трущиеся тела, от формы краев трущихся поверхностей, от количества притекающей смазки и, вероятно, от давления p, приходящегося на единицу поверхности.

Многие из этих обстоятельств имеют большое влияние на величину коэффициента трения, а между тем при бывших

опытах они оставались или вовсе не определенными или определенными недостаточно.

В описаниях сделанных доныне опытов нет указания не только толщины слоя ε, но не описываются даже все обстоятельства, обусловливающие его величину. Температура слоя смазывающей жидкости, за неимением необходимых приборов, никогда не измерялась, и о ней можно составить себе понятие только приблизительно. До какой степени такое указание недостаточно, можно судить по изменениям величины μ, найденным для сурепного масла (§ 66) в пределах тех температур, которые весьма легко могут встречаться при хороших условиях движения машинных частей.

Эти свойства бывших опытов над трением машинных частей почти устраняют возможность сравнения численных величин коэффициентов трения, найденных опытами, с коэффициентами трения, определенными уравнениями (21) или (21a).

По необходимости надо ограничиться сравнением характерных признаков зависимости изучаемого коэффициента от разных обстоятельств, влияющих на него. Для более близкого сравнения понадобятся новые опыты, к которым благоразумно будет приступить только в таком случае, если главные свойства величины f, указанные уравнением (21), подтвердятся бывшими уже опытами и если относительно опытов, повидимому, не подтверждающих или даже противоречащих указаниям уравнения (21), будут найдены вероятные объяснения причин, устранивших явное согласие между опытом и формулою.

78. Приступая к сравнению влияния разных обстоятельств на величину коэффициента трения, указанных уравнением (21), с влиянием тех же обстоятельств по результатам опытов, следует прежде всего вспомнить, что уравнение (21) выведено в предположении, что расстояние между внутренним и внешним цилиндрами вполне определено и не зависит ни от давле-

ния, под которым находится жидкость, ни от температуры ее, ни от скорости вращения; а применяется теперь это уравнение к таким случаям, где расстояние между цилиндрами может зависеть от всех этих элементов, а может быть и совсем не существует, если только машинные части приходят во взаимное прикосновение. Поэтому надо проверить правильность состава уравнения относительно каждого из входящих в него элементов. Проверяя уравнение относительно скорости, надо иметь в виду, что путь, приведший к уравнению (21) или (19), был такой же, какой привел к уравнению (8), оказавшемуся в полном согласии с опытами Пуазейля, и какой привел О. Е. Мейера к его уравнениям, подтвердившимся его же опытами; следовательно, надо помнить, что если уравнение (19) может не вполне соответствовать явлениям трения машинных частей, то это несоответствие может происходить оттого, что сила трения, возбуждающаяся во время движения машинных частей, будет пропорциональна не первой степени скорости, а ее квадрату, подобно тому как уже и оказалось при опытах Д. И. Менделеева (§ 73), но нет никакого основания предполагать, что скорость может входить в степенях ниже первой степени. Как только будет найдено, что и при наибольших толщинах смазывающего слоя, когда развитие разнообразных движений, не соответствующих предположению, положенному в основу вывода уравнения (19), будет наиболее возможно, тогда надо будет признать, что уравнение (19) относительно скорости вообще правильно.

Относительно уравнения (21а) надо сказать, что оно применимо только в тех случаях, когда величиною $\frac{\mu}{\lambda_1}+\frac{\mu}{\lambda_2}$ можно пренебрегать сравнительно с величиною средней толщины слоя ε.

Если при наименьших толщинах ε пренебрежение окажется возможным с достаточною точностью, то во всех случаях большей толщины смазывающего слоя это пренебрежение будет

более правильно. Можно ли пренебрегать суммою $\frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}$ сравнительно с величиною ε, это обнаружится из сличения коэффициентов трения при различных толщинах смазывающего слоя и при прочих равных обстоятельствах. Если окажется с достаточною точностью, что коэффициенты трения обратно пропорциональны толщине, то с этою степенью точности можно будет остановиться на уравнении (21а) взамен более сложного уравнения (21).

79. Поверка уравнения (21) относительно влияния скорости лучше всего может быть сделана, обращаясь к опытам Гирна, опубликованным[1] еще в 1854 г. К этим опытам следует обратиться прежде, чем к другим, не только потому, что они были сделаны ранее других, о которых мы еще будем говорить, но главное потому, что способы исследования, принятые Гирном, более всех других приближаются к тому, что должно быть сделано, принимая во внимание по возможности все обстоятельства, способные влиять на величину коэффициента трения. Правда, что и он определил не все, а найденная им из этих опытов величина механического эквивалента теплоты 370 килограммометров[2] не согласна с принятою теперь величиной 425 килограммометров; но, как увидим ниже, его определения разных элементов были сделаны лучше, чем другими, а неправильность в определении механического эквивалента произошла, по всему вероятию, от неправильности определения числа оборотов прибора. Прибор, измерявший скорость, показывал ее, вероятно, на 12 или 13% менее действительной. Число оборотов измерялось особым прибором, который получал дви-

---

[1] Bull. Soc. Industr. de Mullhouse, t. XXVI, 1854, p. 188 et suiv. Études sur les principaux phénomènes que présentent les frottements médiats et sur les diveres manières de déterminer la valeur mécanique des matières employées au graissage des machines.

[2] *Hirn.* Études sur les principaux phénomènes, p. 205.

жение от главного прибора посредством шнурка, перекинутого через ось главного прибора и через шкив прибора, измерявшего скорость. При подобной передаче шнурок всегда несколько скользит, и по этой причине число оборотов, определенных прибором, не могло быть вполне правильно и было непременно на несколько процентов меньше действительного. Эта ошибка в наблюдениях Гирна не имеет никакого существенного значения для предстоящего нам сличения главнейших свойств коэффициента трения, указанных уравнением (21) и определенных опытами Гирна.

80. Прибор Гирна состоял из чугунного пустотелого барабана (диаметром 230 и длиною 220 мм) с несколькими тонкими спицами и ступицей, расположенными по средине длины барабана и отлитыми вместе с ним. Концы барабана закрыты жестяными пластинками с круглыми отверстиями около центра. Барабан посредством ступицы был надет на горизонтальную железную ось и скреплен с нею. Диаметр оси был меньше диаметров отверстий в жестяных пластинках, и потому около нее оставались в пластинках кольцевые отверстия. Через отверстие одной из пластинок можно было ввести внутрь барабана трубку и наливать в барабан воду, назначавшуюся для его охлаждения; через отверстие в другой пластинке вода вытекала из барабана, попадала в жестяную трубу, припаянную концом к этой пластинке вокруг отверстия, и этою трубкой отводилась в сторону, в особый приемный ящик, вовсе не попадая на наружную цилиндрическую поверхность барабана. Наружная поверхность барабана, обточенная и отполированная в виде круглого цилиндра, имела одну общую геометрическую ось с цапфами железной оси, пропущенной через ступицу. Барабан поддерживал положенный на него бронзовый подшипник, имевший вид полуцилиндра, хорошо пришлифованного нижнею поверхностью к наружной поверхности барабана. На подшипник был положен дубовый брус

наподобие коромысла весов. Концы коромысла были нагружены и при покойном состоянии коромысла уравновешивались. Вес всего коромысла с подшипником и подвешенными грузами составлял 50 кг. Ошибка в весе грузов, уравновешивавшихся около оси барабана, была не более 10 г,[1] т. е. не более 0.0002 полного груза. Вращение барабана увлекало с собою коромысло, и для поддержания его в горизонтальном положении надо было один конец коромысла нагружать более прежнего. Этот-то добавочный груз и давал возможность определять коэффициент трения.

В подшипнике с одного бока было сделано углубление в виде вертикального цилиндра, в которое плотно входил шарик термометра. Судя по чертежу прибора Гирна, надо думать, что расстояние от шарика термометра до внутренней трущейся поверхности подшипника было около 10 мм.

Скорость вращения барабана определялась особым прибором, находившимся в связи с осью барабана посредством шнурка.

С этими приборами Гирн делал опыты с различными смазывающими веществами[2] и определял влияние скорости и температуры на величину силы трения, или, все равно, на величину коэффициента трения.

Для определения влияния величины поверхности прикосновения трущихся тел или давления, приходящегося на квадратную единицу поверхности, он употреблял особый динамометр, передававший движение от двигателя к станку мюльдженни.

---

[1] Bulletins, p. 200.

[2] *Hirn*. Études, Tableau F: spermacéti d'Angleterre, spermacéti Haussoulier (Paris), spermacéti artificiel, huile d'olive, huile d'olive autre, huile de pieds de boeuf, huile de navette, dite pelée, huile de Colza di te, perfectionnée, huile oleine, huile dite maceline, huile de baleine brute suif, eau, air.

Для поддержания той или другой температуры подшипника, которую он изменял в пределах от 19 до 60° С, через барабан пропускалась вода.

81. Результаты наблюдений Гирна приведены в его сочинении и составляют несколько больших таблиц. Нет надобности приводить здесь все эти таблицы во всей их полноте; но нельзя обойтись без выписки некоторых результатов.

Важнейшие части таблицы Гирна приведены в следующих таблицах (стр. 145, 146, 147).

Таблица 8

Нижняя часть барабана погружена в оливковое масло

Отношение P/p	Температура прибора, °C	При 92 об/мин скорость 1.108 м/сек			При 51 об/мин скорость 0.614 м/сек		
		уравновешивающая нагрузка, P кг	коэффициенты трения f	отношения коэффициентов	уравновешивающий груз, P кг	коэффициенты трения f	отношения коэффициентов
0.61	60	0.76	0.0646	1	0.41	0.0398	1
0 60	55	0.85	0.0817	1.264	0.51	0.0494	1.241
0.59	50	1.06	0.1015	1.571	0.625	0.0603	1.515
0.61	45	1.35	0.1285	1.989	0.82	0.0789	1.980
0.63	40	1.74	0.1644	2.545	1.10	0.1052	2.643
0.64	35	2.83	0.2088	3.232	1.49	0.1414	3.553
0.64	30	2.82	0.2610	4.040	1.80	0.1700	4.271
0.62	25	3.56	0.3250	5.031	2.15	0.2015	5.063

В описании опытов ничего не говорится о несоответствии поверхностей; упоминается только, что подшипник тщательно пришлифовывался к барабану, и косвенным образом указывается,[1] что при одинаковой величине трущихся поверхностей при употреблении одного и того же смазывающего масла,

[1] *Hirn.* Études sur les principaux phénomènes, p. 216.

Таблица 9

Нижняя часть барабана погружена в спермацетовое масло

Температура прибора, °C	При 51 об/мин		
	уравновешивающая нагрузка, P кг	коэффициенты трения f	отношение коэффициентов трения
60	0.19	0.0185	1
55	0.24	0.0233	1.259
50	0.29	0.0280	1.513
45	0.39	0.0378	2.043
40	—	—	—
35	0.64	0.0608	3.286
30	—	—	—
25	1.1	0.1052	5.686

Таблица 10

Нижняя часть барабана погружена в очищенное оливковое масло

Температура прибора, °C	При 51 об/мин		
	уравновешивающая нагрузка, P кг	коэффициенты трения f	отношение коэффициентов трения
60	—	—	—
55	0.56	0.0541	1.250
50	0.7	0.0675	1.559
45	0.89	0.0855	1.974
40	1.15	0.1099	2.538
35	1.48	0.1406	3.247
30	1.87	0.1762	3.861
25	2.45	0.2284	5.274
20	3.00	0.2768	6.383

Таблица 11

Барабан смазывается спермацетовым маслом

Температура прибора, °C	При 92 об/мин		
	уравновешивающая нагрузка, P кг	коэффициенты трения f	отношение коэффициентов трения
60	0.4	0.0388	1
55	0.7	0.0675	1.734
50	1.04	0.0996	2.553
45	1.34	0.1276	3.289
40	—	—	—
34.5	3.9	0.3538	9.093
29.6	4.85	0.4324	11.14
25.7	5.7	0.5083	13.10

Таблица 12

Наименование масел	Температура прибора, °C	Уравновешивающая нагрузка		Относительное достоинство масла	Отношение нагрузок p / P
		при 90 об/мин	при 50 об/мин		
Спермацетовое английское	40	0.93	0.59	1	0.63
» искусственное	40	0.84	0.55	1.11	0.65
Оливковое	40	1.60	1.02	0.58	0.63
Из бычьих ног	40	1.8	1.17	0.515	0.65
Сурепное масло (huile de navette) . .	40	1.81	1.09	0.51	0.60
Сурепное усовершенствованное	40	2.05	1.31	0.45	0.64
Масло оливковое (huile oleine)	40	1.97	1.24	0 47	0.63
Масло из маслин	40	1.85	1.18	0.50	0.64
Китовый жир неочищенный	40	1.46	0.92	0.64	0.63
					0.63

при одинаковых скоростях, давлениях и температурах величины коэффициентов трения оказывались одинаковыми. Из этого следует заключить, что несоответствие поверхностей или устранялось хорошею пришлифовкой, или было слишком мало, чтобы обнаружить свое влияние заметным образом.

То же самое надо сказать о влиянии формы краев подшипника. Изменение вида трущихся поверхностей в телах тех размеров, какие были в приборе Гирна, и под влиянием таких сил, с которыми он имел дело, нельзя и ожидать.

Поэтому все эти обстоятельства можно считать или устраненными или проявлявшимися всегда в одной и той же мере — постоянными. Следовательно, оставались переменными только разные смазки, температуры, при которых происходило трение, скорости, относительные давления и толщина смазывающего слоя.

В своих опытах Гирн, исследуя различные сорта смазывающих масел, изменял и значение остальных переменных в довольно широких пределах, исключая только толщину смазывающего слоя. Величины этой переменной не только не были определены точно, но не описаны и приблизительно. Поэтому-то и влияние других переменных в опытах Гирна несколько замаскировывается влиянием толщины слоя, и так как, к несчастью, влияние этого последнего элемента совсем не мало, пренебрегать им нет никакой возможности, то опытами Гирна нельзя воспользоваться для совершенно бесспорного подтверждения уравнения (21).

82. Легче всего показать, что коэффициент трения машинных частей прямо пропорционален внутреннему трению жидкости, как то показывает уравнение (21a). Коэффициенты трения, приведенные в табл. 8, 9 и 10, относятся к одинаковым давлениям и скоростям, соответствующим 51 об/мин барабана. Во всех этих случаях нижняя часть барабана была погружена в смазывающую жидкость, следовательно условия смазывания

были одинаковы. Наконец, во всех трех таблицах встречается температура одинаковой величины. Сравнивая коэффициенты трения при смазке очищенным оливковым маслом, помещенные в табл. 10, с соответствующими коэффициентами, находящимися в табл. 9 и соответствующими спермацетовому маслу, находим, что при всех температурах первые превышают вторые и эти отношения суть

$$\frac{541}{233}=2.32,\quad \frac{675}{280}=2.41,\quad \frac{855}{375}=2.26,\quad \frac{1406}{608}=2.31 \text{ и } \frac{2284}{1052}=2.17.$$

Среднее из этих пяти отношений равно 2.29. Почти это же самое соотношение оказывается между коэффициентами трения оливкового масла (Huile vièrge) и спермацетового (Winter-oil), найденными С. И. Ламанским[1] при температурах 9.16 и 25° С. Отношения эти равны

$$\frac{810}{312}=2.60,\quad \frac{548}{215}=2.51 \text{ и } \frac{372}{146}=2.55,$$

а среднее для них число равно 2.55. Небольшая разница между 2.55 и 2.29 должна быть приписана некоторому различию свойств масел, бывших у Гирна и испытанных С. И. Ламанским. Доказательства правильности такого объяснения представляются опытами самого же Гирна. Сравнивая коэффициенты трения, найденные при смазывании обыкновенным (неочищенным) оливковым маслом, приведенные в табл. 8, с соответствующими коэффициентами при спермацетовом масле, из табл. 9. находим отношения

$$\frac{398}{185}=2.15,\quad \frac{494}{233}=2.11,\quad \frac{603}{280}=2.15,\quad \frac{789}{378}=2.10 \text{ и } \frac{1414}{608}=2.33.$$

---

[1] Опыты С. И. Ламанского сделаны им по поручению Русского технического общества, предпринявшего их по представлению второго отдела общества вследствие предложения автора этой статьи. Приводимые здесь результаты получены при посредстве прибора Пуазейля.

Среднее для них число 2.17 почти настолько же отличается от 2.29, как это последнее от 2.55. Замечательно притом, что очищенное оливковое масло оказалось в отношении смазывания хуже неочищенного.

Приведенные соотношения коэффициентов трения, найденных для различных масел, и их коэффициентов внутреннего трения вполне удовлетворительно подтверждают правильность состава уравнения (20) и (21а) относительно влияния внутреннего коэффициента трения жидкости на величину коэффициента трения в машинных частях.

83. Рассматривая приведенные таблицы (§ 81) с тем, чтобы изучить влияние температуры на величину коэффициента трения, надо прежде всего заметить, что приведенные в них числа в столбцах под буквою T суть температуры шарика термометра, а не самого смазывающего слоя. Температуры этого последнего не были наблюдаемы и теперь определить их с точностью невозможно. Но во всяком случае можно сказать, что средние температуры смазывающего слоя были больше соответственных чисел, стоящих в столбцах T, и притом тем больше отличались от них, чем выше были температуры T, относящиеся к шарику. В самом деле, если подшипник, охлаждавшийся окружающим его воздухом и прижатым к нему деревянным рычагом, вследствие лучеиспускания имел в течение некоторого времени в том месте, где находился шарик, некоторую постоянную температуру, более высокую, чем окружающие его тела, то, значит, к месту подшипника, заключавшему шарик, притекала теплота от других более нагретых частей подшипника, и именно от частей, находившихся в прикосновении со смазкою, где вследствие трения постоянно развивалась теплота. Чем больше температура T шарика превышала температуру окружающих тел, тем больше теплоты терял подшипник, тем больше переходило ее в подшипнике от мест, окружавших шарик, к наружной охлаждавшейся

поверхности подшипника, и взамен этой потери места, окружающие шарик, должны были получать теплоту от мест, прикасающихся к смазке, а больший приток теплоты к шарику от внутренней поверхности подшипника непременно требовал, чтобы разница температур шарика и внутренней поверхности подшипника, прикасавшейся к смазке, была больше.

Итак, чем больше температура T термометра превышала температуру T_0 окружающих предметов, тем больше температура T_1 поверхности подшипника, прикасавшейся к смазке, должна была превышать температуру T термометра.

Если же назовем среднюю температуру смазывающего слоя t, то она, очевидно, была больше T_1, ибо без этого развивавшаяся в смазке теплота не могла бы передаваться внутренней поверхности подшипника.

Следовательно, непременно

$$t > T_1 > T,$$

и притом t тем больше превосходит T, чем больше T превосходит T_0.

Но как именно велика была разница

$$t - T$$

этого сказать теперь невозможно, во-первых, потому что это одна из труднейших задач математической физики, и, во-вторых, потому что неизвестны ни коэффициент теплопроводности металла подшипника Гирна, ни даже размеры этого подшипника. По всему вероятию, однако, эта разница не превосходила небольшого числа единиц градусов. Судя по маленькому чертежу, приложенному к статье Гирна, его подшипник был толщиною около 20 мм, и термометр показывал температуру T в середине его толщины, т. е. в расстоянии 10 мм от нагревавшейся поверхности. Охлаждавшаяся часть подшипника составляла его фланс и имела вид короткого и широкого стержня, толщиною около 20 мм, шириною в 200 и длиною в 60 мм.

Поэтому о разнице температур T_1 и T можно составить себе некоторое представление на основании опытов Р. Э. Ленца,[1] определявшего температуру в разных частях круглого (диаметром 8.12 мм) стержня из зеленой меди, нагревавшегося на одном конце. Температуры стержня на разных расстояниях от нагретого конца представляет табл. 13.

Таблица 13[1]

Расстояние, см	0	1	2	3	4	5	6	7
Температура, °C	61.16	52.62	45.42	39.34	34.18	29.78	26.01	22.78
Уменьшение температуры на расстоянии 10 мм, °C	—	9.54	7.20	6.08	5.16	4.40	3.77	3.23

Приведенные здесь температуры t' чрезвычайно близко подходят к температурам, наблюдавшимся в подшипнике при различных опытах Гирна. Разницы температур $T_1 - T$ едва ли много отличались от соответствующих чисел последней строки этой таблички.

Для определения же разницы температур $t - T_1$ нет возможности привести и подобного приведенному приблизительного соображения. Все, что можно тут сказать, это то, что ввиду чрезвычайно малой толщины слоя нельзя ждать большой разницы между t и T_1, а следовательно числа, выражающие разность $t - T$, не могут много отличаться от соответствующих чисел последней строки табл. 13.

84. Имея в виду только что приведенные соображения, можно приступить к изучению влияния температуры на вели-

[1] *Р. Э. Ленц*, О влиянии температуры на теплопроводность металлов. 1869. стр. 48.

чину коэффициента трения, пользуясь для этого опытами Гирна. Остановиться следует прежде всего на тех опытах, где по возможности устранено влияние толщины слоя, чтобы его влияние не приписать влиянию температуры. Поэтому надо сначала расследовать те опыты, при которых нижняя часть барабана погружалась в смазку.[1] Опыты, сделанные при этом условии, показали, что зависимость коэффициента трения от температуры в пределах испытанных температур остается одна и та же для всех[2] испытанных Гирном масел и при различных скоростях. Эту зависимость он выразил довольно простым уравнением.

Обозначая буквою A величину коэффициента трения какого-нибудь масла при температуре T_1 и буквою a некоторое постоянное число, Гирн говорит, что коэффициент трения f, соответствующий какой-нибудь температуре T, определится из уравнения

$$f = \frac{A}{a(T - T_1)}.$$

Число A для различных масел различно, а число a для всех масел, испытываемых Гирном, одно и то же, именно $a = 1.0492$.

Формула Гирна весьма хорошо согласуется с опытами, но она будет верна только в тех случаях, когда температура, измеряемая в подшипнике, будет отличаться от температуры смазывающего слоя как раз настолько же, насколько она отличалась в приборе Гирна. В других условиях она уже будет неверна, точно так же как ею нельзя пользоваться, вводя температуру самого смазывающего слоя.

Чтобы сравнить уравнение (21a) с результатами описанных опытов, предположим, подобно Гирну, что в нем не только U_1 и p не переменяются, но и ε остается величиной постоянной.

---

[1] *Hirn*. Études, стр. 198 (в самом начале).

[2] Id., стр. 199 (в самом начале).

Назовем f' коэффициент трения, соответствующий температуре t', и μ' коэффициент внутреннего трения, соответствующий той же температуре t', а при температуре t пусть будет f и μ; тогда на основании уравнения (21а)

$$\frac{f}{f'} = \frac{\mu}{\mu'}. \tag{22}$$

Гирн испытывал сурепное масло и говорит, что найденное им соотношение коэффициентов трения, соответствующих разным температурам, остается одно и то же для всех масел, следовательно относится и к сурепному маслу. Поэтому введем в последнее уравнение вторую часть уравнения (12), найденного для сурепного масла из опытов Мейера. Тогда получим

$$\frac{f}{f'} = \frac{1.4 + 0.529t' + 0.0507t'^2}{1.4 + 0.529t + 0.0507t^2}. \tag{22а}$$

Это уравнение дает возможность определить соотношение между коэффициентами трения при сурепном масле, соответствующими различным температурам, строго говоря, не превышающим 31.6° С.

Если только остановимся на этих температурах, то почти невозможно воспользоваться опытами Гирна. Поэтому позволим себе несколько экстраполировать.

Допустим, что при наиболее низкой температуре наблюдений, равной 25° С, когда разница между температурою шарика и смазывающего слоя должна быть наименьшая, она будет почти равна соответствующему числу табл. 13. Примем, что $t = 29°$. Введем это число в последнее уравнение и определим из него температуры t', соответствующие разным величинам соотношения $t : f'$. Для величин этих соотношений возьмем средние величины из табл. 8, 9 и 10; тогда получим результаты, помещенные в следующей таблице.

Таблица 14

Расстояние, мм	0	1	2	3	4	5	6	7
Температура T в ° C	60	55	50	45	40	35	30	25
Ср. величина отношения $f:f'$ . . .	1	1.258	1.537	1.997	2.575	3.279	4.057	5.263
t' в ° C	73	65	58	50	44	38	33.5	29

Величины t выражают температуру смазывающего слоя при опытах Гирна, определенную на основании уравнения (22а). Величины эти представляются весьма вероятными и, должно быть, отличаются от действительных очень немного. А так как температуры t найдены на основании предположений, что уравнение (21а) правильно представляет зависимость коэффициента трения от температуры и что уравнение (12) применимо к температурам выше 31.6°, то, казалось бы, можно считать оба эти предположения хорошо подтвержденными.

85. Совокупное влияние толщины смазывающего слоя и температуры на величину коэффициента трения обнаруживается легко из сравнения табл. 8, 9 и 10 с табл. 11. В первых трех таблицах, где собраны результаты тех наблюдений, при которых толщина слоя не менялась вместе с изменениями температуры, отношения коэффициентов, соответствующие одинаковым температурам, почти не различаются между собой. Средние величины этих соотношений приведены в табл. 15 под буквою δ. Совсем другие соотношения коэффициентов трения находятся в табл. 11, хотя температуры в ней те же самые, как и в табл. 8, 9 и 10, и хотя оставалось такое же спермацетовое масло, как и при опытах, к которым относится табл. 9. Разница этих двух рядов испытаний состояла только в том, что при опытах, доставивших числа табл. 8, 9 и 10, нижняя часть барабана погружалась в масло и таким образом толщина

слоя постоянно поддерживалась без перемены; а при опытах, доставивших числа табл. 11, барабан был смазан и при продолжительном вращении смазка не могла сохранить своей толщины. Чтобы ближе проследить влияние толщины смазки, числа, выражающие соотношения коэффициентов, находящиеся в табл. 11, помещены в табл. 15 под буквою δ', соответственно температурам, точно так же как и числа δ.

Таблица 15

Расстояиня, мм	0	1	2	3	4	5	6	7
T в °C	60	55	50	45	40	35	30	25
δ	1	1.259	1.513	2.043	—	3.286	—	5.686
δ'	1	1.734	2.553	3.289	—	9.091	11.140	13.100

Достаточно одного взгляда на последние две строки этой таблицы, чтобы убедиться в полной невозможности оставлять толщины смазывающего слоя без надлежащего внимания.

86. Влияние скорости, при которой совершается трение смазанных частей, на величину коэффициента трения резко выступает при рассматривании табл. 8 и 12; но приступить к сравнению этих таблиц с уравнениями (21) и (21а) невозможно, не обратив серьезного внимания на то влияние, которое при этих опытах оказывала толщина смазывающего слоя. Совокупное влияние обоих этих элементов невозможно было устранить при опытах, потому что толщина слоя есть некоторая функция скорости. По поводу чрезвычайно мало еще исследованной зависимости толщины смазывающего слоя от скорости Гирн говорит:[1] «Когда вещества (смазывающие) чрезвычайно жидки и почти вполне лишены липкости (viscosité) (каковы вода, воздух и т. п.), влияние скорости хотя и остается всегда

[1] *Hirn.* Études, p. 210.

заметным, но оказывается значительно слабее, чем для жиров, которые действительно можно употреблять для смазывания, и определить это влияние чрезвычайно трудно. По мере уменьшения скорости количество смазывающего вещества, увлекаемого под подшипник, тоже уменьшается; трущиеся поверхности сближаются и их взаимодействие увеличивается.[1] Чтобы ближе охарактеризовать влияние скорости на толщину слоя, Гирн говорит:[2] «Если, не изменяя температуры, мы будем уменьшать скорость, то сначала увидим, что коэффициенты трения уменьшаются; но затем является такой момент, когда эти уменьшения коэффициента трения прекращаются и потом коэффициенты трения начинают быстро возрастать и даже значительно превосходят величины, соответствующие самым большим скоростям». Не следует ли, говорит Гирн,[3] видеть в этом противоречие? И отвечает: ничуть. Все это весьма естественно и может быть предвидено из простого соображения. Если масло жидко, а давление велико, то является такой момент, когда скорость оказывается недостаточно большою, чтобы увлекать смазывающее вещество под подшипник, и слой его становится все тоньше и тоньше.

Из этих указаний, конечно, нельзя найти точную зависимость между скоростью и толщиной смазывающего слоя, но можно сказать, что при изобильном притоке смазки, когда нет в ней никакого недостатка, слой смазывающего вещества между трущимися поверхностями уменьшается по мере уменьшения скорости. При скоростях, близких к нулю, толщина слоя чрезвычайно мала; при первых же увеличениях скорости толщина быстро возрастает и потом, при дальнейших возрастаниях скорости, толщина слоя увеличивается, но очень мало.

---

[1] Строго говоря, все можно объяснить одним уменьшением толщины слоя, вовсе не говоря ничего об увеличении взаимодействия твердых тел (§ 9—12).

[2] *Hirn.* Études, p. 213.

[3] Id., p. 214.

После этих замечаний относительно влияния скорости на толщину смазывающего слоя можно уже приступить к изучению влияния скорости на величину коэффициента трения; и очевидно, что для возможного устранения единовременного влияния скорости и толщины слоя на величину коэффициента трения надо брать только такие опыты, при которых скорости уже достаточно велики, чтобы сообщать толщине слоя мало различающиеся величины.

Гирн полагает, что опыты, к которым относятся табл. 8 и 12, были сделаны при достаточно больших скоростях. Из табл. 8 он видит, что при всех температурах при уменьшении скорости от 92 оборотов к 51 в минуту, или переходе от 1 к 0.55, имеет место уменьшение уравновешивающих нагрузок p/P, или, все равно, уменьшение коэффициентов трения в отношении 1 : 0.62; из табл. 12 видно, что уменьшению числа оборотов в отношении 90 : 50 = 1 : 0.55 соответствует уменьшение уравновешивающих нагрузок или коэффициентов в трения в отношении 1 : 0.63. Кроме этих опытов, говорит Гирн,[1] «множество других опытов, сделанных при многих других скоростях и при чрезвычайно разнообразных условиях, приводили меня к тем же результатам, как только при разных скоростях поддерживалась одна и та же температура: всегда нагрузка, уравновешивавшая трение, была в прямой зависимости от скорости». Притом:[2]

«1) Когда трущиеся поверхности смазываются обильно хорошим и достаточно вязким маслом, когда давление, прижимающее эти поверхности, не настолько велико, чтобы вытеснять смазку из занимаемого ею промежутка, когда, наконец, при опытах с различными скоростями, температура постоянно поддерживается одна и та же во всех частях, тогда

[1] *Hirn.* Études, p. 208.
[2] Id., p. 209.

нагрузки, уравновешивающие трение, почти пропорциональны скоростям».

«2) Когда трущиеся поверхности очень мало смазаны или очень долго двигаются с одним и тем же количеством масла, или когда разжиженность масла слишком велика, таким образом, что при малых скоростях остается слой гораздо более тонкий, чем при больших скоростях, или еще, когда давление, прижимающее поверхности одну к другой, слишком велико относительно величины самой поверхности, но температуры постоянны, — тогда грузы, уравновешивающие трение, пропорциональны скоростям, возвышенным в степени, меньшие единицы и тем более приближающиеся к половине, чем менее благоприятными становятся все обстоятельства».

«4)[1] Когда поверхности трутся без смазки и когда под действием большого давления воздух не может проникать и несколько отделять их одну от другой, словом сказать, когда трение становится непосредственным,[2] влияние скорости совершенно исчезает».

«5) Наконец, когда не обращают вовсе внимания на температуру и когда поверхности смазываются так, как это обыкновенно бывает в машинных частях, можно считать, без большой ошибки, что в этом общем случае:

Трение пропорционально корню квадратному скорости, так что скорости, находящиеся в отношении чисел 1 : 4 : 9 : 16 и т. д., вызовут трения, величины которых будут в отношении чисел 1 : 2 : 3 : 4 и т. д.»

$$f = A\sqrt{U}\,. \tag{23}$$

[1] *Hirn*. Études, p. 210.

[2] Тут, к удивлению, Гирн ничего не говорит о постоянстве температуры.

Обращаясь теперь к уравнению (21) и в особенности к уравнению (21a)

$$f = \mu \frac{U}{\varepsilon p}, \tag{24}$$

тотчас же видно, что:

1) Оно, точно так же как и опыты Гирна, показывает, что при неизменности величины μ, зависящей от температуры, толщины слоя ε и давления на единицу поверхности p, величина коэффициента трения f прямо пропорциональна скорости U. Следовательно, в этом отношении уравнение (21a) вполне правильно.

2) Оно, подобно опытам Гирна, показывает, что уменьшение толщины слоя смазки влечет за собой увеличение коэффициента трения. Следовательно, и в этом отношении уравнение (21a) приведет к правильным выводам, как только будет найдена зависимость между толщиною смазывающего слоя ε и скоростью U. К сожалению, надо сказать, что для удовлетворительного количественного определения этой зависимости еще вовсе нет надлежащих данных.

87. Влияние величины поверхности прикосновения трущихся тел на величину силы трения или величину давления, приходящегося на квадратную единицу поверхности, т. е. на величину коэффициента трения, было исследовано посредством особого динамометра, передававшего движение от приводов прядильной фабрики к станку мюль-дженни. Гирн уменьшил[1] поверхности плат-банд в отношении 20 : 12, или, все равно, увеличил относительное давление в отношении 12 : 20; при этом оказалось, что сила трения уменьшилась. Два сравнительных опыта, длившихся довольно продолжительное время, привели к результатам, очень близким между собою. Один из этих сравнительных опытов показал, что увеличение отно-

[1] *Hirn*. Études, таблица F.

сительного давления в отношении $12 : 20 = 1 : 1.666$ уменьшило работу, или коэффициент трения, в отношении $1 : 1.335$, а другой опыт — в отношении $1 : 1.351$. Среднее из этих двух последних отношений $1 : 1.34$ уже немного отличается от отношения $1 : 1.666$; но действительное уменьшение силы трения, зависившее от уменьшения величины поверхности прикосновения, было еще ближе к отношению $1 : 1.666$, потому что показания динамометра относились к целому станку, в котором происходило трение не только в плат-банд, а и в других местах, и трение этих частей, не подвергавшихся никакому изменению при изменении поверхностей плат-банд, далеко не составляло малой части всего трения. На этом не совсем определенном замечании Гирн останавливается. Поэтому и здесь невозможно привести более точно зависимости между величинами коэффициента трения f и давлениями p, приходящимися на квадратную единицу площади.

Этих указаний, однако, достаточно, чтобы показать правильность уравнения (21а) в отношении p. Уравнение (21а) прямо показывает, что если бы изменялись одни относительные давления и все остальное оставалось без перемены, то коэффициенты трения уменьшались бы прямо пропорционально увеличению относительных давлений. Но так как при увеличении давления на квадратную единицу трущихся поверхностей несколько уменьшается толщина слоя ε, то коэффициент трения f убывает не столь быстро, как увеличивается давление p.

Итак, можно сказать, что опыты Гирна вполне удовлетворительно подтверждают уравнение (21а).

88. Сравнение результатов, найденных Гирном, с уравнением (21), приведенное в предыдущих параграфах, вполне удовлетворительно подтверждает правильность состава уравнения (21а), а замечание Гирна (§ 86), что коэффициент трения перестает уменьшаться только при очень малых скоростях, когда толщина слоя чрезвычайно уменьшается, показывает,

что при обыкновенных обстоятельствах член ε, стоящий в знаменателе формулы (21), выражающей коэффициент трения, значительно превосходит сумму остальных двух членов $\frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\mu}{\lambda_2}$. Это обстоятельство указывает прямо, что в обыкновенных случаях можно брать уравнение (21а) взамен уравнения (21).

89. В виде большего еще подтверждения возможности заменять уравнение (21) уравнением (21а) и для некоторого указания приблизительной величины, какую толщину имеет смазывающий слой, я могу привести небольшие свои собственные опыты, сделанные над машинкою Ингам и Стапфер, более известною под названием машинки Белли. В этой машинке два полуцилиндрических подшипника охватывают сверху и снизу цилиндрический небольшой барабан, помещенный на горизонтальной оси.

В верхнем подшипнике термометр. Делая испытания масла с этой машинкой, обыкновенно ее смазывают одною или двумя каплями испытуемого масла и определяют число оборотов, нужное для того, чтобы поднять температуру термометра на известное число градусов. Сначала обыкновенно повышение температуры идет весьма быстро, а под конец опыта, когда температура уже довольно высока, увеличения ее идут медленно, поэтому число оборотов определяется не особенно точно.

Опыты, сделанные с деревянным маслом, доставили мне следующие числа:

Машинка, смазанная одною каплей, вращаясь 8 мин., нагревалась от 12 до 70° С, т. е. на 58°, делая при этом

1	10 419	оборотов
2	10 393	оборота
3	10 090	оборотов
4	10 135	»
В среднем	10 262	оборота

Смазанная двумя каплями, вращаясь 13 мин., нагревалась от 20 70° С, т. е. на 50°, делая при этом

1	17 644 оборота
2	17 783 »
3	17 996 оборотов
В среднем	17 808 оборотов

Вращаясь 13.5 мин., машинка нагревалась от 20 до 70° С, т. е. на 50°, делая при этом

1	18 104 оборота
2	18 121 оборот
3	18 230 оборотов
В среднем	18 152 оборота

В первых четырех опытах машинка делала в минуту средним числом 1283 оборота; в следующих четырех опытах среднее число оборотов в минуту было 1283, а при четырех последних опытах среднее число оборотов в минуту было 1345. Следовательно, во всех десяти случаях скорость была почти одна и та же. Давления были одинаковы. Температуры тоже мало разнились, и, если угодно, средняя температура при смазывании одною каплей была несколько ниже, чем при смазывании двумя каплями. Следовательно, средняя величина коэффициента внутреннего трения в первых четырех опытах была чуть-чуть больше, чем в последних шести. Потеря теплоты в первых четырех опытах относится к 8 мин., а в последних шести опытах — к 13 мин. Следовательно, при каждом из первых четырех опытов было потеряно меньше теплоты, чем при каждом из шести последних; но во всяком случае все эти разницы невелики, и с довольно большою точностью можно сказать, что при одной капле нагревание на 50° достигалось приблизительно в 9500 об/мин, при двух же каплях — в 18 000 об/мин, а это значит, что коэффициенты трения были обратно пропорциональны числу капель смазки, или, все равно, обратно пропорциональны толщине

слоя. Другими словами, это значит, что при описанных опытах толщина смазывающего слоя ε уже достаточно превышала сумму членов $\frac{\mu}{\lambda_1}+\frac{\mu}{\lambda_2}$. Что касается толщины смазывающего слоя, то надо заметить, что диаметр барабана был 71 мм, а его длина 78 мм; следовательно, поверхность барабана была 17400 мм^2. Объем капли с точностью неизвестен, но во всяком случае он не превосходил 17 мм^3. Отсюда оказывается, что при деревянном масле толщина слоя $\varepsilon = 0.001$ мм уже обеспечивает возможность останавливаться на уравнении (21а).

90. Убедившись в удовлетворительной применимости уравнения (21а) в тех условиях, в которых Гирн производил свои опыты, можно рассмотреть, насколько вообще вероятно его положение 5 (§ 86), что в машинных частях при обыкновенной совокупности влияния скорости и температуры, зависящей от этой скорости, коэффициент трения изменяется прямо пропорционально корням квадратным соответствующих скоростей, т. е. что

$$f=A\sqrt{U}\,.$$

В машинных частях нет искусственного охлаждения. Температура их смазывающего слоя обусловливается равенством количества теплоты, развивающегося вследствие трения, с тем количеством теплоты, которое в то же время теряется машинною частью вследствие теплопроводности и лучеиспускания. Если машинная часть двигается со скоростью U и ее коэффициент трения

$$f=\frac{\mu U}{\varepsilon p}\,,$$

то под действием прижимающей силы P производится в каждую единицу времени работа трения

$$\frac{\mu U^2}{\varepsilon p}P\,.$$

Число единиц тепла q, соответствующее этой работе, получится после разделения работы на механический эквивалент теплоты E и будет

$$q=\frac{1}{E}\frac{\mu U^2}{\varepsilon p}P.$$

Чтобы выразить формулою число единиц тепла, теряемого частью, назовем:

t — температуру смазывающего слоя,

t_0 — температуру окружающего воздуха,

K — коэффициент передачи теплоты в течение избранной единицы времени, к которой относится выше приведенное выражение развития тепла трением.

Число единиц теряемой теплоты будет:

$$K(t-t_0).$$

При установившихся обстоятельствах, которые техников больше всего и интересуют, два приведенных выражения теплоты будут взаимно равны, и получится уравнение

$$\frac{1}{E}\frac{\mu U^2}{\varepsilon p}P=K(t-t_0).$$

Если величину μ, стоящую в этом уравнении, заменим надлежащею функцией температуры t и если удастся выразить ε в виде функции U, то получится уравнение, связывающее две переменные величины, а именно скорость U и температуру t. Из этого уравнения тогда можно будет определить температуру, соответствующую каждой данной скорости.

После этого решения нетрудно уже будет сравнить коэффициенты трения, соответствующие разным скоростям. Положим, например, что при скорости U_1 уравнение доставило для температуры величину t_1; назовем μ_1 коэффициент внутреннего трения, соответствующий температуре t_1, и ε_1 — толщину слоя, соответствующую скорости U_1; тогда f_1 — коэффициент трения,

соответствующий скорости U_1, будет на основании уравнения (21a):

$$f_1 = \frac{\mu_1 U_1}{\varepsilon_1 p},$$

а при скорости U

$$f = \frac{\mu U}{\varepsilon p};$$

отношение этих коэффициентов будет

$$\frac{f_1}{f} = \frac{\varepsilon \mu_1 U_1}{\varepsilon_1 \mu U}.$$

Если теперь заметим, что при увеличении U_1 увеличивается ε_1 и температура t, а вследствие увеличения температуры весьма уменьшается коэффициент внутреннего трения μ_1, то станет ясно, что отношение коэффициентов f_1/f будет возрастать значительно слабее, чем отношение скоростей. Мало этого, надо еще сказать, что отношение μ_1/μ может весьма много зависеть от величины той температуры, от которой начинаются изменения. Например, для сурепного масла уравнение (12) показывает, что

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{1.4 + 0.529t + 0.0507t^2}{1.4 + 0.529t_1 + 0.0507t_1^2},$$

и если вместо t_1 напишем $t + \tau$, то

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \frac{1.4 + 0.529t + 0.0507t^2}{1.4 + 0.529(t + \tau) + 0.0507(t + \tau)^2}.$$

Это отношение при одинаковых τ вовсе не одинаково для различных t. Следовательно, отношение f_1/f зависит от той температуры, при которой начинается изменение скоростей.

Если прибавим еще ко всему сказанному, что ε — толщина слоя, не есть величина, исключительно зависящая от скорости, а напротив, при одинаковых скоростях может изменяться в зависимости от количества притекающей смазки, от большего

или меньшего соответствия поверхностей, от формы краев подшипников, от давления, приходящегося на единицу поверхности, и, наконец, от деформации трущихся частей под влиянием сил, на них действующих, то немудрено будет объяснить, почему различные наблюдатели приписывают скорости различные влияния на величину изменения коэффициента трения обыкновенных машинных частей, почему закон, указанный Гирном и приведенный в начале этого параграфа, не подтверждается наблюдениями Терстона (§ 96) и наблюдениями Кирхвегера (§ 97). В настоящее время, за недостатком знаний зависимости между толщиною смазывающего слоя и скоростью, нельзя даже и приблизительно выразить этот закон какою-либо формулой: его надо изучать, разбирая бывшие опыты.

91. Во всех тех случаях, когда для определения коэффициента трения применимо уравнение (21a) и когда опыт дает величину его, это же уравнение дает возможность определить толщину смазывающего слоя, если только известна температура этого слоя. К слову тут сказать, что кабинетные опыты для определения величины коэффициента трения, даже наилучшим образом организованные, даже те, для которых будут известны температуры смазывающего слоя, годятся главным образом только для изучения зависимости толщины смазочного слоя от различных обстоятельств. Для определения же наиболее вероятной величины коэффициента трения в тех или других условиях практики надо поступать, следуя приемам статики.

Толщина слоя, бывшая в различных опытах, для которых применимо уравнение (21a), определяется из уравнения

$$\varepsilon = \frac{\mu U}{fp}. \qquad (25)$$

Ясно, что определить ε можно только в тех случаях, когда известны все величины, стоящие во второй части уравнения. Величины U, p и f в таблицах опытов всегда указываются,

но величина μ никогда не определялась; поэтому бывшие опыты дают недостаточный материал для точного изучения ε. Бывшими опытами можно воспользоваться только для определения первого грубого приближения к величине ε, так сказать, для разъяснения порядка величин, к которым относятся толщины смазывающего слоя.

Вставляя в уравнение (25) величины U, p и f из табл. Гирна 8, 9, 10 и 11 и вставляя величины μ, определяемые уравнением (12), причем температуры t взяты из табл. 14, нетрудно определить толщины слоя смазки, соответствующие разным опытам Гирна. Величины эти определены и помещены в табл. 16, дополняющей табл. 8, 9, 10 и 11. При этом величина μ для спермацетового масла взята в 2.55 раза меньше, чем для оливкового, ввиду результатов, полученных на опытах С. И. Ламанского.

Таблица 16

Температура, °C		Коэффициент внутреннего трения оливкового масла μ	Толщины смазывающего слоя в машинах ε				
			оливковое масло (табл. 8)		спермацетов. масло (табл. 9) 51 об/мин $v=0.602$	оливков. очищен. (табл. 10) 51 об/мин $v=0.602$	спермацетов. масло (табл. 11) 92 об/мин $v=1.108$
прибора T	слоя t		92 об/мин $v=1.108$	51 об/мин $v=0.602$			
60	73	0.00000031	0.053	0.048	0.041	—	0.036
55	65	0.00000039	0.053	0.052	0.043	0.047	0.025
50	58	0.00000050	0.054	0.051	0.043	0.046	0.022
45	50	0.00000065	0.056	0.050	0.041	0.045	0.022
40	44	0.00000081	0.055	0.048	—	0.045	—
35	38	0.00000106	0.056	0.047	0.037	0.046	0.013
30	35.5	0.00000131	0.056	0.047	—	0.045	0.013
25	29	0.00000168	0.057	0.051	0.039	0.045	0.014
20	24	0.00000234	--	—	—	0.052	—

Из этой таблицы тотчас же видно, что найденные толщины слоя значительно превосходят 0.001 мм, оказавшуюся доста-

точною, чтобы при деревянном масле, железном вале и бронзовых подшипниках принимать уравнение (21а). Толщины слоя почти не зависят от температуры и, повидимому, немного уменьшаются при повышении ее; они увеличиваются при увеличении скорости и при прочих равных обстоятельствах; но изменение скорости от 0.6 до 1.1 м/сек очень немного увеличивает толщину слоя, остающегося на барабане, опущенном нижнею своею частью в масло. Напротив, сличение таблиц, дополняющих 9 и 11, показывает, что различные способы смазывания доставляют слои смазки очень различной толщины; тут становится очевидным, что когда приток масла недостаточно велик, то и увеличение скорости не может увеличить толщину смазывающего слоя.

92. Как ни поучительны опыты Гирна, на них нельзя еще остановиться даже в проверке правильности уравнения (21). Надо обратиться к другим опытам уже потому, между прочим, что при описанных опытах Гирна скорости не превосходили 1.108 м, тогда как в машинах они бывают значительно больше, и, сверх того, нагрузка, под влиянием которой происходило трение, почти совсем не менялась; что нагрузка эта не могла заметным образом менять формулу трущихся частей; что она, вообще говоря, была очень мала сама по себе и производила давления, приходящиеся на единицу поверхности, очень малые, и притом значительно меньше тех, какие, вообще говоря, встречаются в обыкновенных машинах; что скорости менялись в недостаточно широких пределах и что влияние металла подшипника осталось неисследованным.

93. Опыты Терстона, подобно опытам Гирна, представляют влияние температуры, скорости и нагрузки.

Терстон наблюдал[1] трение, развивавшееся между неболь-

[1] *Thurston.* Friction and lubrication, p. 131, fig. 19; p. 132, fig. 20 и p. 146, fig. 21 u. fig. 22.

шою горизонтальною стальною цапфой и двумя прижатыми к ней сверху и снизу бронзовыми подшипниками. Подшипники были охвачены снаружи металлическою рамкой и прижимались к цапфе сверху самой рамкой, а снизу спиральною пружиной, помещенной между нижним подшипником и нижнею частью рамки. Следовательно, сила, действовавшая на верхний подшипник, превосходила силу, действовавшую на нижний, только на величину веса подшипников, рамки и других частей, составлявших одно целое с рамкою. Вес этот был очень невелик, и потому весьма приблизительно можно сказать, что сверху и снизу цапфа подвергалась действию равных и прямо противоположных сил. Понятно, что изгибом цапфы, получившимся вследствие действия веса висевших на ней частей, можно совершенно пренебрегать и, стало быть, можно считать, что при опытах Терстона влияние изгиба устранено.

Смазка к цапфе доставлялась из двух масленок, помещенных над верхним подшипником.

Для определения температуры, при которой совершалось трение, в верхней части рамки было сделано вертикальное отверстие против середины длины цапфы и против этого отверстия в верхнем подшипнике было сделано углубление, в которое и помещался шарик термометра.

Для определения величины коэффициента трения к рамке был приделан стержень с грузом на нижнем конце. Рамка вместе со стержнем и грузом представляла вид маятника, повешенного на цапфу и способного колебаться около нее. Во время спокойного состояния прибора этот маятник висел отвесно, но во время вращения цапфы на ее поверхности развивалась сила трения, которая и выводила маятник из его отвесного положения, и чем больше была сила трения, тем больше она отклоняла маятник.

Измерение углов отклонения маятника от вертикального положения давало Терстону вполне хорошее средство для определения силы трения, а отношение этой силы к силе, прижи-

мавшей подшипники к цапфе, представляло коэффициенты трения.

Для определения величин коэффициента трения при довольно высоких температурах прибор нагревали снаружи горелкою Бунзена.[1]

94. Некоторые численные результаты, найденные Терстоном при посредстве только что описанного прибора, представляет табл. 17 на стр. 172—173.

С первого взгляда на эту таблицу можно удостовериться, что она обнимает несравненно большее число случаев, чем таблицы Гирна. Те и другие таблицы относятся почти к одним и тем же температурам; но в то время как скорости, приводимые Гирном, заключались в пределах 0.602 м/сек (50 оборотов барабана в минуту) и 1.108 м/сек (92 об/мин), скорости, наблюдавшиеся Терстоном, находятся в пределах 0.152 и 6.10 м/сек. Давления на квадратную единицу, при которых Гирн определял силы трения, составляли почти 0.1 ат, тогда как Терстон имеет дело с давлениями на квадратную единицу от 0.27 до 13.6 ат.

Скорости, испытанные Терстоном, обнимают, можно сказать, все встречающиеся в практике; но его давления на квадратную единицу поверхности, несмотря на то, что превосходят в 136 раз давления, испытанные Гирном, еще далеки от нередко встречающихся давлений, допускаемых в практике. Давления на цапфах вагонных осей доходят до 50 и иногда даже до 60 ат.

По этим причинам таблица Терстона должна представлять еще гораздо больший интерес, чем таблицы Гирна, но опытами Терстона еще труднее воспользоваться для вывода какихнибудь общих заключений, чем опытами Гирна. Повидимому, Терстон дает возможность отдельно проследить влияния скорости, относительного давления и температуры на величину

[1] *Thurston*. Friction and lubrication, p. 138.

коэффициента трения; но эта возможность только кажущаяся, а в действительности ее нет. В действительности влияние скорости, точно так же как и влияние относительного давления, представляется в таблице всегда в совокупности с влиянием толщины слоя и температуры, и поэтому ни одно из этих влияний нельзя проследить надлежащим образом.

Справедливость этого замечания будет тотчас же видна из следующих соображений.

95. В приборе Терстона смазывающая жидкость поступает (неизвестно как: посредством ли фитилей, или иначе) в желобок, сделанный в верхней части верхнего подшипника. Из этого желобка масло увлекается осью под одну половину верхнего подшипника; затем, выйдя из-под этой части верхнего под-

КОЭФФИЦИЕНТЫ

Новая стальная цапфа, бронзовые подшипники, скорость, давле

Скорости	30 фут/мин, 0.152 м/сек					100 фут/мин,	
Давление на кв. дюйм: фунт.	200	150	100	50	4	200	150
атм.	13.6	10.2	6.8	3.4	0.27	13.6	10.2
Температура, °C							
65.5	0.0500	0.0500	0.0250	0.0125	0.125	0.0140	0.0074
60.0	0.0250	0.0330	0.0110	0.0087	0.125	0.0100	0.0050
54.4	0.0160	0.0200	0.0044	0.0075	0.125	0.0087	0.0041
48.9	0.0110	0.0110	0.0044	0.0075	0.125	0.0056	0.0035
43.3	0.0100	0.0033	0.0037	0.0062	0.094	0.0044	0.0033
37.8	0.0075	0.0028	0.0031	0.0056	0.094	0.0040	0.0033
32.2	0.0056	0.0025	0.0031	0.0037	0.094	0.0040	0.0033

[1] *Thurston* Friction and lubrication, p. 185.

шипника, масло приближается к наружному краю нижнего подшипника и, находясь под влиянием формы и действия этого края, увлекается осью в промежуток между осью и нижним подшипником и, наконец, после выхода из этого промежутка остающееся на цапфе масло приближается к нижнему краю другой половины верхнего подшипника. Таким образом, при каждом обороте цапфы масло подвергается влиянию краев подшипника или его желобка в трех местах. Естественно, что в этом приборе трение не может уже совершаться при таких же толщинах смазывающего слоя, как это было в приборе Гирна и даже, как это обыкновенно случается, на цапфах железнодорожных вагонов, где имеется всего один подшипник, вместо двух, да еще нередко цапфа смазывается не только сверху но еще и снизу.

Таблица 17

ТРЕНИЯ

ние и температура переменные; смазка — спермацетовое масло

0.506 м/сек			250 фут/мин, 1.287 м/сек		500 фут/мин, 2.574 м/сек		1 200 фут/мин, 6.10 м/сек		
100 6.8	50 3.4	4 0.27	200 13.6	100 6.8	200 13.6	100 6 8	200 13.6	150 10.2	100 6.8
0.0025	0.0037	0.0630	0.0047	0.0028	0.0053	0.0037	0.0060	0.0058	0.0061
0.0025	0.0037	0.0630	0.0047	0.0030	0.0053	0.0037	0.0062	0.0058	0.0070
0.0019	0.0037	0.0630	0.0047	0.0030	0.0053	0.0037	0.0065	0.0962	0.0075
0.0019	0.0037	0.0630	0.0047	0.0037	0.0056	0.0037	0.0969	0.0067	0.0080
0.0019	0.0037	0.0630	0.0050	0.0044	0.0062	0.0050	0.0075	0.0075	0.0087
0.0019	0.0037	0.0630	0.0056	0.0045	0.0065	0.0061	0.0081	0.0083	0.0094
0.0019	0.0037	0.0630	0.0070	0.0052	0.0075	0.0061	0.0100	0.0170	0.0150

Кроме этого обстоятельства, уменьшавшего толщину слоя, были еще и другие. Давления на единицу поверхности в опытах Терстона, как уже сказано, несравненно бо́льшие, чем в опытах Гирна, не только могли уменьшать толщину смазывающего слоя, но могли даже относиться к числу тех, о которых Гирн замечал, что они несоизмеримо велики при данной скорости и данной разжиженности смазывающего вещества (§ 86). Скорости, испытанные Терстоном, были в некоторых случаях меньше скоростей Гирна, и при тех давлениях на единицу, которые были допущены Терстоном, могли быть слишком малы, чтобы поддерживать толщину слоя при ее наибольшем значении. Поэтому, если приведенные соображения, относящиеся к толщине слоя, верны и если уравнение (21а) правильно, то надо ожидать, что коэффициенты трения, найденные Терстоном, обнаружат другие свойства, чем коэффициенты трения, найденные Гирном. Теперь надо ждать, что возвышение температуры, уменьшая коэффициент внутреннего трения и тем уменьшая числитель в уравнении (21а), не уменьшает попрежнему всю дробь, потому что под влиянием того же повышения температуры увеличивается разжиженность масла и уменьшается поэтому толщина ε. Влияние ε будет тем меньше, чем больше скорость, и тем меньше, чем меньше давление на единицу.

Влияние скорости не может так же резко проявиться, как в опытах Гирна, потому что при недостаточно больших скоростях толщина слоя, не близкая к своей наибольшей величине, изменяется сильно вместе с изменением скорости, возрастая при возрастании скорости и убывая при убывании ее.

Влияние относительного давления p тоже маскируется влиянием толщины ε, ибо в то же время, когда увеличивается p, уменьшается ε.

Рассматривая табл. 17, нетрудно убедиться, что все эти ожидания оправдываются. Увеличение температуры уменьшает коэффициенты трения только при скоростях не менее 250 фут/мин, или 1.287 м/сек. При этих больших скоростях влияние

температуры (как и ожидалось) тем больше, чем больше скорость и чем меньше давление.

При скоростях не более 100 фут/мин, или 0.505 м/сек, влияние температуры изменяет коэффициент трения посредством коэффициента внутреннего трения смазки не столь сильно, как посредством толщины слоя. Увеличение температуры уменьшает и μ и ε, но ε уменьшается больше, чем μ. При этом влияние ε тем значительнее, чем меньше скорость и чем больше давление.

Под влиянием скорости числитель в формуле (21а) уменьшается при уменьшении U, но, по замечанию Гирна, ε, стоящий в знаменателе, тоже уменьшается и притом так, что коэффициент трения при малых скоростях может сделаться больше, чем при самых больших (§ 86).

Изменение давления при неизменности температуры и скорости, как видно из таблицы, сопровождается ожидаемыми изменениями толщины слоя.

Следовательно, табл. 17, правильно понятая, не противоречит уравнению (21а), а напротив, в совокупности с этим уравнением могла бы представить некоторый материал для изучения зависимости толщины слоя смазки ε от скорости, относительного давления и температуры, если бы только температуры, приведенные в таблице, действительно относились к смазывающему слою.

Изучение этой зависимости теперь в высшей степени необходимо: оно одно только и может заметно подвинуть вперед наши знания, относящиеся к вопросу о трении.

Но для исследования, основанного на опытных данных, надо иметь убеждение в достаточной правильности определения величин, представленных в таблице. Есть два обстоятельства, заставляющие предполагать, что температуры, приведенные в табл. 17, довольно много отличаются от истинных температур.

Первое обстоятельство есть замечание самого Терстона, что температуры указаны только приблизительно (it schould

ЧИСЛО ЕДИНИЦ ТЕПЛОТЫ,

Новая стальная цапфа, бронзовые подшипники; скорость, давле

Скорости		30 фут/мин, 0.0152 м/сек					100 фут/мин,	
Давление на кв. дюйм: фунт.		200	150	100	50	4	200	150
атм.		13.6	10.2	6.8	3.4	0.27	13.6	10.2
Температура								
°F	°C							
150	65.5	2.4	1.82	0.6	0.16	0.12	2.27	0.90
140	60	1.2	1.22	0.27	0.11	0.12	1.62	0.60
130	54.4	0.8	0.73	0.11	0.09	0.12	1.40	0.50
120	48.9	0.53	0.40	0.11	0.09	0.12	0.90	0.41
110	43.3	0.49	0.12	0.09	0.07	0.09	0.72	0.40
100	37.8	0.36	0.11	0.07	0.07	0-09	0.65	0.40
90	32	0.26	0.09	0.07	0.04	0.09	0.65	0.40

be remembered that no temperature readings can be taken as more tham approximate).[2]

Второе обстоятельство есть устройство самого прибора Терстона. Шарик его термометра помещался в углублении, сделанном в верхнем подшипнике, подобно тому как в приборе Гирна. Показания термометра поэтому были ниже средней температуры смазывающего слоя. Разность между показаниями термометра и истинною температурой слоя и здесь была тем больше, чем выше были температуры термометра и чем больше были разности температур термометрического шарика

[1] Величина поверхности прикосновения цапфы с подшипником определена на основании указания Терстона, что при нагрузке 1000 фунт. на ось или 5000 фунт. на цапфу давление было 400 фунт. на кв. дюйм (см. Thurston. p. 145).

[2] *Thurston.* Friction and lubrication, p. 188.

Таблица 18

РАЗВИВАВШЕЙСЯ В МИНУТУ[1]

ние и температуры переменные; смазка — спермацетовое масло

0.506 м/сек			250 фут/мин, 1.287 м/сек		500 фут/мин, 2.574 м/сек		1 200 фут/мин, 6.1 м/сек		
100 6.8	50 3 4	4 0.27	200 13.6	100 6.8	200 13.6	100 6.8	200 13.6	150 10.2	100 6.8
0.20	0.16	0.20	1.90	0.57	4.29	1.50	11.66	8.46	5.83
0.20	0.16	0.20	1.90	0.59	4.29	1.50	12.05	8.46	6.80
0.16	0.16	0.20	1.90	0.59	4.29	1.50	12.63	9.03	7.28
0.16	0.16	1.20	1.90	0.75	4.54	1.50	13.41	9.80	7.78
0.16	0.16	0.20	2.02	0.89	5.02	2.02	14 58	10.93	8.46
0.16	0.16	0.20	2.31	0.89	5.26	2.40	15.80	11.74	9.15
0.16	0.16	0.20	2.84	1.05	6.07	2.40	19.44	24.80	14.58

и тел, окружающих прибор (§ 81). Эти последние температуры вовсе не указаны в таблице, а между тем, как увидим далее они должны были быть чрезвычайно различной величины. Количество теплоты, передававшейся прибором телам, окружавшим его, в течение единицы времени, при различных опытах прямо определяло рассматриваемую разность температур и делало ее тем больше, чем больше теплоты развивалось трением в течение единицы времени. Количества же развивавшейся теплоты были прямо пропорциональны работе силы трения. Насколько эти количества были разнообразны, можно легко судить, глядя на табл. 18.

Глядя на эту таблицу, тотчас же обнаруживается, что во многих случаях количества развивавшейся теплоты были

очень не велики, а в других, напротив, были весьма значительны. Есть большое основание предполагать (§ 99), что при той теплопроводности, которая соответствует прибору Терстона, теплоты, развивавшейся трением, было во многих случаях недостаточно для поддержания в приборе той температуры, которая приведена в таблице, и что температура эта поддерживалась в шарике термометра нагреванием рамки, охватывающей подшипники; напротив, в других случаях теплоты развивалось так много, что только охладительные приборы, окружавшие рамку, могли понижать температуру шарика до того числа градусов, которое приводится в приборе. Во всех тех случаях, когда рамка нагревалась извне, температура шарика была или выше, или равна температуре смазывающего слоя; во всех случаях охлаждения прибора температура шарика была ниже температуры смазывающего слоя. Это обстоятельство показывает, что табличные температуры были одни выше, другие равны и третьи ниже действительной температуры смазывающего слоя. Но где именно было то, другое и третье обстоятельство,— этого сказать нельзя.

Затем эта таблица, в соединении с соображениями, высказанными по поводу разницы температур термометрического шарика и смазывающего слоя в опытах Гирна (см. конец § 82 и табл. 14), ясно показывает, что разности температур смазывающего слоя и термометра в опытах Терстона были во многих случаях гораздо более велики, и главное, находясь под влиянием чрезвычайно разнообразных количеств теплоты, развивающейся в единицу времени, сами должны были быть чрезвычайно разнообразны.

Если, например, при развитии 0.07 единиц тепла в минуту разность температур была даже 0.1°, то при развитии 24.8 единиц в минуту разность могла быть уже около 60°. Такие огромные поправки едва ли можно вводить с какою бы то ни было надеждой на удовлетворительные результаты, когда наибольшая разница между табличными температурами едва

превосходит 33° С. Отсюда следует, что таблицею Терстона невозможно воспользоваться для изучения отдельного влияния какого бы то ни было из элементов, обусловливающих величину коэффициента трения; точно так же нельзя ею воспользоваться для изучения зависимости между толщиною смазывающего слоя и разными обстоятельствами, определяющими его.

96. Табл. 17 скорее всего может послужить для наблюдения над некоторым средним изменением величины коэффициента трения при изменении скорости, не обращая внимания на температуру, лишь бы только температуры не выходили из пределов обыкновенных температур.

Останавливаясь на этой точке зрения, Терстон говорит:[1] «Для холодных цапф, находящихся в хороших условиях, смазываемых хорошим спермацетовым маслом, когда скорости заключаются в пределах от 100 до 1200 фут/мин (от 0.5 до 6 м/сек), можно считать, что коэффициент трения изменяется пропорционально корню пятой степени скорости»

$$f = a\sqrt[5]{U}. \tag{26}$$

Гирн из своих наблюдений полагал (§ 86), что

$$f = A\sqrt{U}.$$

Это различие формул, по всему вероятию, объясняется различием тех температур, при которых совершались опыты. Влияние температуры на отношение скоростей было уже изложено (§ 90): чем выше температура, при которой совершается трение, тем меньше становится μ, и весьма вероятно, что дробь

$$\frac{\mu U}{\varepsilon}$$

[1] *Thurston*. Friction and lubrication, p. 189, отд. 187.

при больших скоростях, когда ε близко к своему наибольшему пределу, возрастает меньше, чем при малых скоростях. Температуры в опытах Терстона при больших скоростях были, по всему вероятию (см. табл. 18), значительно выше температур, при которых Гирн делал свои опыты.

97. Влияние относительной нагрузки, представленное табл. 17, даже в общем направлении едва ли правильно. Так, из этой таблицы оказывается, что даже при самых низких температурах скорость в 250 фут/мин, или 1.287 м/сек, и даже 500 фут/мин, или 2.574 м/сек, еще недостаточно велика, чтобы масло, увлекаемое под подшипник, доставляло такой толстый слой, при котором коэффициент трения начинает, согласно с уравнением (21a), уменьшаться при увеличении относительного давления от 100 до 200 фунт/кв. дюйм, или от 6.8 до 13.6 атм.; а между тем в другом месте своего сочинения Терстон приводит [1] таблицу опытов, сделанных при скорости 300 фут/мин, или 1.515 м/сек, тоже со стальною цапфой и бронзовыми подшипниками, смазанными спермацетовым маслом, и в этих опытах, как показывает таблица 19, увеличение давления p до 500 фунт/кв. дюйм, или до 34 атм., вызывало уменьшение коэффициента трения.

Таблица 19

p, фунт.	100	200	300	400	500
p, атм.	6.8	13.6	20.4	27.2	34
f	0.141	0.0063	0.0049	0.0042	0.0039

Другая таблица Терстона [1] еще более опровергает табл. 17. Часть результатов, приведенных в этой другой таблице, представляет табл. 20.

[1] *Thurston.* Friction and lubrication, p. 177.

Таблица 20

Цапфа чугунная, подшипники стальные, скорость 150 фут/мин, 0.769 м/сек

Давление p		Коэффициент трения	
фунт.	атм.	спермацетовое масло	масло из Западной Виргинии
50	3.4	0.013	0.0213
100	6.8	0.008	0.015
250	17	0.005	0.009
500	34	0.004	0.00525
750	51	0.0043	0.005
1000	68	0.009	0.010

Из этой таблицы видно, что даже при скорости в 150 фут/мин, или 0.759 м/сек, спермацетовое масло может оставаться достаточно толстым слоем при всех давлениях, не превышающих 500 фунт/кв. дюйм, или 34 атм., а для масла, называемого маслом из Западной Виргинии, слой остается достаточно толстым под давлениями, доходящими до 750 фунт/кв. дюйм, или до 51 атм.

Этой последней таблице сам Терстон придает больше значения, потому что обращается к ней для указания зависимости между величиною коэффициента трения и величиною относительного давления. На основании своих опытов Терстон [8] полагает, что

$$f = \frac{a}{\sqrt{p}}. \qquad (27)$$

Легко убедиться самым простым вычислением, что формула эта довольно недурно согласуется с табл. 20, но далеко не согласна с табл. 19. Эта же формула довольно удовлетворительно подтверждается опытами Кирхвегера с сурепным маслом, при

[1] *Thurston.* Friction and lubrication, p. 175.

котором давления изменялись в пределах от 26.6 до 168.3 фунт/кв. дюйм. К этим опытам мы теперь и перейдем.

98. Прибор Кирхвегера[1] по существу своему мало отличается от прибора Терстона. В обоих приборах подшипники прижимались к цапфам сверху и снизу почти одинаковыми силами и почти не гнули цапфы. В опытах Кирхвегера стальная вагонная ось была диаметром 2 $^3/_4$ дюйма, длиною 5 $^1/_2$ дюймов, или диаметром 67 мм и длиною 134 мм. Подшипники из твердого свинцового сплава, поверхность соприкосновения цапфы и подшипника в одном случае 6 кв. дюймов, или 35.4 см^2, в другом случае 5 $^3/_4$ кв. дюйма, или 34 см^2. Число оборотов было 180 и 360 в минуту, или 0.630 и 1.260 м/сек.

Опыты доставили результаты, приведенные в следующих четырех таблицах: 21, 22, 23 и 24.

Таблица 21

Смазка Cohäsionsöl; поверхность прикосновения 6 кв. дюймов = 35.4 см^2, подшипник из твердого свинцового сплава. Число оборотов 180 в минуту, скорость 0.63 м/сек

Полная нагрузка, фунт	Давление на кв. дюйм		Коэффициенты трения						
	фунт.	атм.	наибольший		наименьший		средний из двух опытов		средний из четырех опытов
160	26.6	2.11	0.0253	0.0253	0.0253	0.0221	0.253	0.0237	0.0245
260	43.3	3.43	0.0175	0.0175	0.0155	0.0155	0.0165	0.0168	0.0167
410	68.3	5.41	0.0173	0.0173	0.0161	0.0160	0.0165	0 0164	0.0165
510	85	6.73	0.0163	0.0144	0.0149	0.0139	0.0157	0.0141	0.0149
660	110	8.71	0.0122	0.0138	0.0115	0.0114	0.0120	0.0127	0.0124
760	126.6	9.97	0.0097	0.0117	0.0094	0.0113	0.0096	0.0114	0.0105
910	151.6	12.01	0.0095	0.0135	0.0095	0.0092	0.0092	0.0111	0.0103
1010	168.3	13.33	0.0100	0.0080	0.0085	0.0080	0.0092	0.0680	0.0086

[1] Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, 1864, S. 12.

Таблица 22

Железная ось диаметром 85 мм, длина 134 мм, поверхность прикосновения 47.3 см². Число оборотов 180 в минуту, скорость 0.80 м/сек. Подшипник из оловянного сплава, смазка — сурепное масло

Полная нагрузка, фунт.	Давление на кв. дюйм		Коэффициенты трения		
	фунт.	атм.	наибольший	наименьший	средний
2 070	259	20	0.0123	0.0084	0.0107
4 070	509	40	0.0100	0.0083	0.0094
6 070	759	60	0.0097	0.0069	0.0079
8 070	1 009	80	0.0112	0.0092	0.0096

Таблица 23

Смазка — сурепное масло, поверхность прикосновения $5^3/_4$ кв. дюйма = 34 см², подшипник из твердого свинцового сплава. Число оборотов 180 в минуту, скорость 0.630 м/сек

Полная нагрузка, фунт.	Давление на кв. дюйм		Коэффициенты трения		
	фунт.	атм.	наибольший	наименьший	средний
2 070	360	28.1	0.0117	0.0081	0.0099
4 070	707.8	56.0	0.0124	0.0081	0.0103
6 070	1 055.7	83.8	0.0107	0.0077	0.0092
8 070	1 403.5	111.2	0.0096	0.0082	0.0089

Таблица 24

Смазка — сурепное масло, поверхность прикосновения 34 см², подшипник из твердого свинцового сплава. Число оборотов 360 в минуту, скорость 1.26 м/сек

Полная нагрузка, фунт.	Давление на кв. дюйм		Коэффициенты трения			
	фунт.	атм.	наибольший	наименьший	средний	
4 070	707.8	56.0	0.0098	0.0081	0.0089	0.0090
			0.0103	0.0085	0.0091	
6 070	1 055.7	83.8	0.0101	0.0087	0.0094	0.0095
			0.0109	0.0084	0.0096	
8 070	1 403.6	111.2	0.0104	0.0071	0.0087	0.0094
			0 0115	0 0087	0.0101	

Вообще Кирхвегер приходит к следующим заключениям:

1) Для железных и стальных цапф, для сурепного масла и для масла под названием Cohäsionsöl, при подшипниках из оловянного сплава[1] и из твердого свинцового[2] сплава коэффициент трения заключается между 0.0090 и 0.0099.

2) При бронзовых[3] подшипниках он равен 0.0141.

3) Коэффициент трения не зависит ни от нагрузки, ни от величины поверхности прикосновения.

4) Не зависит от скорости. Число оборотов было 10, 180 и 360.

5) Температура окружающего воздуха в пределах от 25° до —5° не имеет влияния.

99. При рассмотрении табл. 23 и 24 тотчас обнаруживается, что увеличение скорости с 0.630 до 1.26 м/сек при прочих, повидимому, одинаковых условиях не увеличило коэффициента трения даже и в той степени, как предполагает Терстон для ненагревающихся цапф, т. е. пропорционально корню пятой степени скорости. Табл. 22 и 23 заставляют думать, что при одинаковых нагрузках величины поверхности прикосновения не имеют влияния, так как поверхностям прикосновения в 34 и 47.3 см² соответствуют почти одинаковые коэффициенты.

Табл. 21, 22 и 23 обнаруживают с ясностью, что при скоростях в 0.63 и 0.80 м/сек коэффициенты трения уменьшаются по мере увеличения полного давления и при изменениях отно-

---

[1] Смесь 59 частей олова, 13 антимония и 9 меди сплавляется и отливается в виде тонких пластинок; потом к 81.5 части этого сплава прибавляется 88.5 части олова, снова сплавляется и сплав выливается в подшипники.

[2] Сплав 85 частей свинца и 15 частей антимония.

[3] Сплав 20 частей меди, 2 частей олова, 1 части цинка и 1 части свинца.

сительного давления в пределах от 2.11 до 111 атм., т. е. в пределах, обнимающих все встречающиеся ныне практические случаи.

Наконец, надо сказать, что, сравнивая эти четыре таблицы с табл. 8 опытов Гирна, в которой приведены величины коэффициента трения, полученные с оливковым маслом, мало отличающимся от сурепного масла (см. табл. 12), не обнаруживается не только согласия, но не оказывается, повидимому, даже никакой связи между результатами Гирна и Кирхвегера. Чтобы понять результаты этих опытов, совершенно необходимо составить себе хотя бы приблизительное понятие о средней температуре смазывающего слоя.

100. Величину этой температуры можно будет несколько уразуметь, если допустим весьма вероятное предположение, что цапфа ходила в нормальных условиях, т. е. что количество теплоты, развивавшейся вследствие трения, было равно количеству теплоты, поглощаемой телами, окружавшими цапфу. Количество теплоты, развивавшейся во время опытов, определить нетрудно; но определить температуру смазывающего слоя по количеству развивавшейся теплоты и температуре окружающих тел крайне трудно. Однако, чтобы составить себе о ней представление, допустим, подобно Гирну, что количество теплоты теряющейся может быть выражено произведением разности температур x смазывающего слоя и окружающих тел на коэффициент передачи теплоты Δ, т. е.

$$x\Delta\,.$$

О приблизительной величине Δ мы можем судить из опытов, которые мне самому пришлось произвести несколько лет тому назад.

Обыкновенная железнодорожная цапфа, диаметром около 80 мм, поддерживала подшипник с обыкновенною вагонною буксой. К буксе подвешивался груз, и в верхней части ее,

подобно тому как и в приборе Терстона, было сделано отверстие, под которым находилось углубление в подшипнике. В углубление, сделанное в подшипнике, плотно вставлялся железный стаканчик с ртутью, в которой помещался шарик термометра.

При одном из опытов цапфа, смазываемая деревянным маслом, поддерживая груз в 202 пуда, или 3260 кг, вращаясь довольно равномерно, делала в течение 32 минут 4.342 оборота, и термометр, показывавший сначала температуру одинаковую с окружающим воздухом, равную 14.2° C, поднялся в конце опыта до 20° C. Вес цапфы с подшипником и буксою был не более 20 кг (самая цапфа около 6.75 кг, подшипники около 3.25 кг и букса около 10 кг). Средняя температура всех этих трех предметов поднялась не более чем на 6° C. Теплоемкость их может быть принята в 0.1, следовательно для повышения их температуры надо было сообщить им не более $0.1 \cdot 20 \cdot 6 = 12$ единиц тепла. Трение же на цапфе развило, конечно, гораздо больше теплоты. Судя по опыту Кирхвегера с деревянным маслом при нагрузке в 8000 фунт. коэффициент трения при оловянном подшипнике был не менее 0.01; следовательно, работа трения при одном обороте цапфы была не менее $32.6\pi \cdot 0.080 \approx 8.2$ кг-м; а при 4342 оборотах было произведено не менее 35 000 кг-м, что соответствует почти 83 единицам тепла. Отсюда следует, что в течение 32 мин. воздух, прилегавший к буксе, и в особенности ось, составлявшая продолжение цапфы, поглотили почти 71 единицу тепла.

Применяя сюда соображения, изложенные в § 81, можно надеяться, что не только средняя, но и наибольшая разница температур смазывающего слоя и охлаждающих тел едва ли была более 10° C. На основании этих соображений можно сказать, что число единиц тепла Δ, передаваемых в течение минуты, было

$$\frac{71}{32 \cdot 10} \approx \frac{1}{4} \text{ единицы.}$$

По всему вероятию, поглощение теплоты телами, отнимавшими ее от прибора Кирхвегера, было не меньше этого.

101. Имея в виду это число, обратимся к опытам Кирхвегера. Назовем:

P — полное давление одного подшипника на цапфу, выраженное в кг;

d — диаметр цапфы в м;

f — соответствующий коэффициент трения;

n — число оборотов в минуту;

q — число единиц теплоты, развиваемой трением в минуту.

Тогда, принимая, что подшипников два и что механический эквивалент теплоты равен 425 кг-м, можно будет сказать, что

$$q = \frac{2\pi d f P}{425} n. \tag{28}$$

Если вся эта теплота отдается окружающим телам при разности температур смазывающего слоя и окружающей среды, равной x, то

$$x\Delta = \frac{2\pi d f P}{425} n.$$

Если t_0 — температура окружающего воздуха и t — температура смазывающего слоя, то

$$t - t_0 = \frac{2\pi d f P}{425\Delta} n. \tag{29}$$

Это уравнение дает возможность тотчас же определить температуру t, как только будут известны d, P, f, n и Δ.

Если из опытов Кирхвегера $\Delta = {}^1/_4$; $\pi d = 0.210$, $n = 180$, и затем будем вставлять из табл. 21, 23 и 24 числа P и f, то получим соответствующие величины $t - t_0$.

Таким образом, опытам табл. 21 и давлениям 160, 260, 410, 510, 660, 760, 910, 1010 фунт. соответствуют $t - t_0 = 1.3$, 1.3, 2.3, 2.5, 2.7, 2.7, 3.1, 2.8° С.

Опытам, приведенным в табл. 23, и давлениям 2070, 4070, 6070, 8070 фунт. соответствуют $t - t_0 = 3.2$, 6.3, 8, 13.4° С.

Наконец, опытам, приведенным в табл. 24, и давлениям 4070, 6070, 8070 фунт. соответствуют $t - t_0 = 12$, 16, 26° С.

102. Приведенные таблички тотчас же показывают, что опыты, сгруппированные в табл. 21, были сделаны почти при одинаковых температурах смазывающего слоя и что температуры его должны относиться к числу весьма невысоких.

Напротив, температуры, соответствующие опытам, приведенным в табл. 24, когда число оборотов было 360, были довольно значительно выше температур, соответствующих опытам, приведенным в табл. 23, при которых число оборотов в минуту было 180. Следовательно, если коэффициенты трения табл. 24 не превышают соответствующих коэффициентов табл. 23, то это обстоятельство вовсе не может служить опровержением уравнения (21а), а указывает только, что условия опытов были таковы, что величина дроби $\frac{MU}{\varepsilon}$, соответствующая опытам табл. 24, была такая же, как и соответствующая опытам табл. 23, что уменьшение μ вследствие увеличения температуры и увеличение ε под влиянием увеличения скорости, а может быть, и других обстоятельств уменьшало при этих опытах μ во столько же раз, во сколько увеличивалась скорость U. Относительно коэффициентов, соответствующих 10 об/мин, нельзя ничего сказать, так как коэффициенты эти не приведены самим Кирхвегером в описании опытов. Это объяснение мы должны принять потому, что, как было уже сказано (§ 78), неправиль-

ность уравнения (21) относительно скорости U могла бы быть только в том, что показатель степени ее мал, но никак не в том, что этот показатель мог бы быть нуль, как того требуют не объясненные правильно опыты Кирхвегера.

Следовательно, 4-й вывод Кирхвегера (§ 98) нельзя принять безусловно.

103. Указанная Кирхвегером в п. 3 (§ 98) независимость коэффициента трения от относительной нагрузки тоже неправильна. В опытах, приведенных в табл. 21, скорости и температуры были почти постоянны, менялись только относительные давления, и вероятно, толщина слоя менялась в той мере, в какой она зависит от давления.

Рассматривая средние величины коэффициентов трения, показанных в табл. 21, как функции давления, приходящегося на квадратную единицу поверхности, и обозначая $p_1 = 2.11$, и вообще обозначая относительное давление принятою уже буквой p, а коэффициенты трения $0.0245 = f_1$ (и вообще, как уже принято, f), нетрудно убедиться, что связь между величинами f и p, помещенными в табл. 21, весьма близко выражается уравнением

$$\frac{f_1}{f} = \sqrt{\frac{p}{p_1}} .$$

Насколько это уравнение близко к истине, видно из следующей табл. 25.

Таблица 25

Давление, атм.	2.11	3.43	5.41	6.73	8.71	9.97	12.01	13.39
f_1 / f	1	1.47	1.49	1.64	1.98	2.33	2.36	2.85
$\sqrt{p / p_1}$	1	1.27	1.60	1.79	2.03	2.17	2.39	2.52

Отношение, представляемое таблицею, можно выразить и уравнением

$$f=f_1\sqrt{\frac{p_1}{p}}, \qquad (30)$$

или

$$f\sqrt{p}=f_1\sqrt{p_1}. \qquad (30а)$$

Подобная же связь между коэффициентами трения и относительными нагрузками указывается и Гирном.[1]

Это же уравнение удовлетворительно связывает опыты Гирна с опытами Кирхвегера и Терстона. Например, по опытам Кирхвегера с сурепным маслом по табл. 21 давлению 6.73 атм. соответствует средняя величина коэффициента трения 0.0149, следовательно давлению $p=0.1$ атм., как было при опытах Гирна с оливковым маслом, мало отличающимся от сурепного, должно соответствовать

$$f=0.0149\sqrt{\frac{6.73}{0.1}}=0.122.$$

Эта величина коэффициента трения весьма немного отличается от коэффициентов трения 0.1052 и 0.1414, встречающихся в табл. 8 и соответствующих скорости 0.613 м, т. е. почти равной скорости в опытах Кирхвегера, и температурам $T=40°$ и $T=35°$, т. е. весьма невысоким из числа температур, испытанных Гирном. Правда, что совпадение могло бы быть и ближе, но не следует забывать, что сурепное масло Кирхвегера могло довольно заметно отличаться от масла Гирна, так как, судя по табл. 12, два сорта сурепного масла, испытанные Гирном, представляли различие более чем на 10%, а сурепное масло, испытанное О. Е. Мейером, дало величину внутреннего трения почти в два раза меньше, чем масло, испытанное Кулоном.

[1] *Hirn.* Études, p. 227.

104. Что касается связи между опытами Гирна и Терстона, то мы получим ее при посредстве табл. 20 и 9. Из табл. 20 видно, что при $p_1 = 3.4$ при спермацетовом масле $f_1 = 0.0130$, а так как в опытах Гирна $p = 0.1$, то следует ожидать, что в таблице Гирна при невысоких температурах и при спермацетовом масле найдется

$$f = 0.0130\sqrt{\frac{3.4}{0.1}} = 0.0758.$$

Этот самый коэффициент, правда, не находится в табл. 9, но интерполяцией нетрудно найти, что он соответствует 30° C. Весьма вероятно, что опыты Терстона относятся к этой именно температуре.

Соотношения между толщинами смазывающего слоя при постоянных величинах температур и скоростей может быть выражено очень просто посредством относительных давлений для всех тех случаев, когда будет справедливо уравнение (30).

Обозначая ε_1 среднюю толщину слоя, которому соответствуют p_1 и f_1, тотчас же получим из совокупности уравнений (25) и (30), что

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} = \sqrt{\frac{p_1}{p}} \quad \text{или} \quad \varepsilon\sqrt{p} = \varepsilon_1\sqrt{p_1}, \tag{31}$$

т. е. что при одинаковых температурах и скоростях и одинаковых условиях смазывания толщины слоев обратно пропорциональны корням квадратным относительных давлений, или, все равно, что при постоянной температуре произведение чисел, выражающих толщину смазывающего слоя, и корня квадратного относительного давления есть величина постоянная для одного и того же масла.

Абсолютные толщины слоев, соответствующих опытам, приведенным в табл. 21, нетрудно вычислить на основании уравнений (25) и (12), если зададим температуру слоя. Глядя на таблицу, помещенную в конце § 101, относящуюся к табл. 21, можно принять, что $t = 18°$ C.

В таком случае найдем:

Таблица 26

При $p=$	2.11	3.43	5.41	6.73	8.71	9.71	12.04	13.33
$\varepsilon=$	0.0440	0.0400	0.0250	0.0220	0.0210	0.0220	0.0180	0.0200

Еще более замечательную связь можно найти при посредстве уравнений (30) и (31) между опытами Кирхвегера, приведенными в табл. 21, и опытами Терстона, приведенными в табл. 20.

Напишем величину коэффициента трения и всех обстоятельств его определяющих, относящихся к опытам табл. 20, буквами без значков

$$f=\frac{\mu U}{\varepsilon p}$$

и относящихся к опытам табл. 21 — со значками

$$f_1=\frac{\mu_1 U_1}{\varepsilon_1 p_1}.$$

Тогда на основании уравнений (30) и (31)

$$\frac{f}{f_1}=\frac{\mu U}{\mu U_1}\sqrt{\frac{p_1}{p}}.$$

Если во все время опытов Терстона скорость и температура не менялись, то μU есть величина постоянная; точно так же, если во все время опытов Кирхвегера скорость U_1 и μ_1 оставались без перемены, то и $\mu_1 U_1$ тоже есть величина постоянная, а стало быть, и отношение этих произведений есть величина тоже постоянная; назовем его

$$A=\frac{\mu U}{\mu_1 U_1}.$$

В таком случае

$$\frac{f}{f_1}=A\sqrt{\frac{p_1}{p}} \quad \text{или} \quad f=A\sqrt{\frac{p_1}{p}}\,f_1. \qquad (32)$$

Отсюда оказывается, что коэффициенты трения, найденные Терстоном, мы должны найти из опытов Кирхвегера, умножая эти последние на некоторую постоянную величину и на корень квадратный обратного отношения давлений.

Для определения A надо было бы знать U, U_1, μ и μ_1. Скорости U и U_1 даны, но для определения отношений μ/μ_1 нам недостает указания температур. Поэтому величину A мы определим из сличения коэффициентов и давлений, относящихся к первым опытам табл. 20 и 21. Это сличение даст нам для спермацетового масла

$$0.013=A\sqrt{\frac{2.11}{3.4}}\cdot 0.0245, \quad \text{откуда } A=0.674,$$

и для масла из Западной Виргинии

$$0.0213=A\sqrt{\frac{2.11}{2.4}}\cdot 0.0245, \quad \text{откуда } A=1.104.$$

Вставляя в уравнение (32) найденные числа A, а также вставляя $f_1=0.0245$ и $p_1=2.11$ из табл. 21 и вместо f_1— числа, стоящие в табл. 20, мы получим следующие результаты:

p	Спермацетовое масло		Масло из Западной Виргинии	
	по уравн. (32)	по табл. 20	по уравн. (32)	по табл. 20
3.4	0.013	0.013	0.0213	0.0213
6.8	0.0090	0.008	0.0151	0.015
17.0	0.0058	0.005	0.0095	0.009
34.0	0.0041	0.004	0.0067	0.0052
51.0	0.0034	0.0045	0.0055	0.005

Различие между числами, найденными по уравнению (32) и по опытам, как видно, весьма невелико. Если же примем в расчет трудность производства опытов, в особенности трудность поддержания постоянства температуры и весьма вероятное, хотя и небольшое повышение температуры при увеличении давления, то несколько меньшие величины коэффициентов, найденные опытом, еще более подтвердят правильность уравнения (32).

Таким образом, мы получили в этом параграфе результаты в высшей степени замечательные. Мы привели три отдельные группы опытов Гирна, Терстона и Кирхвегера, вовсе между собою не связанные, можно сказать, не имевшие поныне, повидимому, ничего общего, в один стройный ряд, подчиненный одним, общим для всех законам. Законы эти оказываются справедливыми только в известных для каждого масла особых пределах. Для спермацетового масла уравнение (32) применимо в пределах $0 < p < 34$ атм., для масла Западной Виргинии $0 < p < 51$ атм.

105. Зависимость между коэффициентами трения и давлениями на квадратную единицу уже совсем не оправдывается ни табл. 23, ни табл. 24.

Коэффициенты трения, приведенные в табл. 23 и, следовательно, найденные при той же скорости, как и коэффициенты трения, помещенные в табл. 21, несмотря на то, что соответствуют давлениям от 28 до 111 атм., почти не отличаются от коэффициента трения, приведенного в табл. 21, соответствующего давлению в 13.3 атм. Такое несогласие между результатами опытов с одним и тем же сортом масла и при одинаковых скоростях должно быть приписано влиянию температуры и толщины смазывающего слоя, соответствовавшим данным условиям смазывания.

Для приблизительного определения той и другой величины надо начать с температуры и обратиться с этою целью к двум

последним табличкам, приведенным в § 102. В них приведены приблизительные величины вероятных разностей температур t и t_0. Для определения t недостает только t_0. В таблицах не приводится указаний относительно величины t_0, соответствующей разным опытам; известно только, что температуры внешнего воздуха заключались между —5 и +25° R, или —6.25 и 31.25°C; при каких температурах было сделано большинство опытов, тоже не указано. Вероятно, эти температуры немного отличались от 15 или 20° C. Принимая эти температуры, нетрудно будет вычислить из уравнения (12) величины соответствующих μ, а затем по уравнению (25) и табл. 23 или 24 — и величины соответствующих толщин слоя смазки ε. Результаты этих вычислений, относящихся к опытам, помещенным в табл. 23, представляет табл. 27.

Таблица 27

Давления			Число единиц тепла q	Разность температур x	При $t_0 = 15°$ C			При $t_0 = 20°$ C		
полное P		относит.								
фунт.	кг				t	μ	ε	t	μ	ε
2 070	967	28.1	1.6	6.40	21.4	0.00000278	0.0062	26.4	0.00000183	0.0041
4 070	1.901	56.0	3.25	12.6	27.6	0.00000183	0.0020	32.6	0.00010737	0.0041
6 070	2.835	83.8	4.0	16.0	41.0	0.00000150	0.0012	36.0	0.00000115	0.0009
8 070	3.769	112.1	6.7	26.8	41.8	0.00000090	0.0006	46.8	0 00000073	0.000

Рассматривая эту таблицу, уже становится видно, что толщины слоя ε, соответствующие даже температуре $t_0 = 15°$ C, значительно меньше того, что можно было бы ожидать, судя по табл. 26 и принимая в расчет уравнение (30). Так, судя по этим данным, надо было бы ожидать, что под давлением в 28 атм. толщина слоя ε будет около 0.014 мм, а по табл. 27 она оказывается 0.0061 мм, т. е. почти в два раза тоньше. Это обстоятельство

нельзя приписать неправильному определению температуры t, приведенной в табл. 27. Допустить, что температуры t были ниже, чем показано в этой таблице, несколько трудно, если только опыты не были сделаны при очень низких температурах окружающего воздуха, о чем нет никакого упоминания в описании опытов; а допуская, что температуры смазывающего слоя были выше приведенных величин t, нашли бы для величин ε еще меньшие размеры. Приведенные соображения заставляют думать, что группа опытов Кирхвегера, обозначенная им буквою C и приведенная здесь в табл. 23, отличалась установкою подшипника от группы опытов, отнесенных им к отделу III и представленных здесь в табл. 21. Пригонка подшипника в этих двух рядах опытов была, вероятно, не одинакова, и очень может быть, что подшипник, протершись под большими нагрузками, допустил среднюю толщину слоя уменьшиться на какие-нибудь 0.008 мм.

Пригонка подшипника, однако, не может еще объяснить всего различия между табл. 26 и 27. Рассматривание этих таблиц ясно показывает, что и температура едва ли оставалась без влияния.

106. Опыты Кирхвегера, как оказывается, трудно было бы согласовать не только с опытами Гирна, но даже одну серию с другою, если бы только допустить, что толщина смазывающего слоя должна считаться вполне определенною функцией температуры самого слоя, давления, под которым он находится, и скорости, под влиянием которой он образуется. Температура, давление и скорость определяют только тот предел, далее которого толщина слоя не может возрасти; но сделать толщину слоя менее этого предела всегда возможно. Такое явление бывает всякий раз, как только приток масла к цапфе недостаточно велик; но уменьшение толщины слоя, по всему вероятию, может происходить и под влиянием других обстоятельств, как увидим тотчас же из разбора опытов, сделанных в Геттингене.

К этим опытам надо обратиться еще и потому, что уменьшение коэффициента трения f при увеличении относительной нагрузки p, указываемое уравнением (20) (§ 102) и вышеприведенными опытами, есть одно из чрезвычайно важных свойств этого коэффициента. Действительность этого свойства должна быть доказана по возможности более разнообразными опытами. Поэтому нельзя оставить без внимания, что в опытах Терстона и Кирхвегера увеличение относительной нагрузки происходило вследствие увеличения полного груза, действующего на одну и ту же поверхность прикосновения цапфы и подшипника, и что, следовательно, было бы чрезвычайно важно убедиться, будет ли обнаружен тот же самый закон при изменении относительной нагрузки под действием одного и того же груза, но при изменении величины поверхности трущихся тел. Проследить явление в этом отношении и подтвердить то же его свойство можно, рассматривая числа, полученные на опытах в Геттингене[1] и приведенные в табл. 28 (см. стр. 196—197).

107. Геттингенские опыты были сделаны с прибором, существенно отличающимся от приборов Терстона и Кирхвегера. Дело в том, что в геттингенском приборе подшипник был только один, лежавший сверху, а нижнего подшипника совсем не было; поэтому давление подшипника на цапфу гнуло ее.

Это обстоятельство, как увидим далее, оказывает заметное влияние на коэффициент трения, но тем не менее оставляет полную возможность наблюдать постоянное уменьшение величины коэффициента трения при увеличении давления, приходящегося на квадратную единицу поверхности прикосновения не только при малых, но и при очень больших давлениях.

Испытаны были три оси с цапфами одного и того же диаметра в 4 дюйма, но длины цапф были не одинаковы, а именно они были 8.5, 7 и 5 дюймов. Каждая из трех цапф была испытана

[1] Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, 1864, S. 16.

Полная нагрузка, фунт.	2500		
Поверхность прикосновения, кв. дюйм	17.9	13.9	11
Давление на кв. дюйм:			
фунт.	140	180	227
атм.	11.1	14.25	18.0
Коэффициенты трения при подшипнике из:			
оловянной бронзы	0.00411	0.00398	0.00275
цинковой »	0.00515	0.00606	—
оловянного сплава	0.06538	0.00555	0.00397
свинцового »	0.00819	0.00662	0.00526

с четырьмя подшипниками из сплавов: медь с оловом, медь с цинком, оловянный сплав и свинцовый сплав. На каждый из подшипников действовали грузы в 2500, 7500 и 10 000 фунтов. С каждым из этих грузов было произведено большое число наблюдений, вращение цапфы совершалось то в ту, то в другую сторону, и коэффициенты трения при разных нагрузках определялись как при переходе от меньших нагрузок к большим, так и при переходе от больших к меньшим. В табл. 28 и 29 приведены средние величины коэффициентов трения, полученных при опытах со скоростями, соответствующими 2, 4 и 8 немецким милям в час, или, все равно, со скоростями на поверхности цапф, равными приблизительно 80, 160 и 320 фут/мин. Следовательно, это будут коэффициенты трения, соответствующие скорости, немного отличающейся от 160 фут/мин., или 0.780м/сек.

Обе таблицы представляют результаты одних и тех же опытов, только в различной группировке. Ими совершенно нельзя воспользоваться для изучения влияния скорости или температуры, потому что, как уже сказано, приведенные в таблицах коэффициенты суть средние величины. Каждый из них соответ-

Таблица 28

5000			7500			10 000		
17.9	13.9	11	17.9	13.9	11	17.9	13.9	11
280	360	454	420	540	681	560	720	908
22.2	28.5	36.0	33.3	42.75	54.0	44.4	57.0	72.0
0.00518	0.00575	0.00288	0.00675	0.00699	0.00408	0.01075	0.0100	0.000602
0.00653	0.00935	—	0.01250	0.01316	—	0.01310	0.01200	—
0.00775	0.00729	0.00409	0.01000	0.00934	0.00386	0.01190	0.00991	0.00530
0.00826	0.00751	0.00488	0.00901	0.00970	0.00836	0.01124	0.01031	—

ствует 120 двойным опытам, сделанным при весьма различных скоростях. О температурах ничего не упоминается, следовательно можно только предполагать, что они были из числа обыкновенно встречающихся и менее отличались от температуры окружающего воздуха, чем во время опытов Кирхвегера, потому что в обоих рядах опытов скорости, относительные давления и полные давления были почти одинаковы, но теплота развивалась в геттингенских опытах под влиянием одного подшипника, прижатого известною силой, а в опытах Кирхвегера — под влиянием почти таких же двух подшипников, и каждый из них прижимался тою же силой. Ясно отсюда, что в геттингенских опытах менее развивалась теплота, чем в опытах Кирхвегера.

108. Табл. 28 приведена потому, что она показывает еще гораздо большее влияние увеличения относительной нагрузки на уменьшение коэффициента трения, чем то, какое показывает уравнение (30) согласно с заключением Терстона (§ 97). Так, по уравнению (30) надо бы ждать, что при увеличении относительной нагрузки в отношении $\frac{18}{11.1}=\frac{36}{22.2}=\frac{54}{33.3}=\frac{72}{44.4}=1.71$

коэффициент трения уменьшится в отношении $1:\sqrt{1.71}=$ $=1:1.3$, а между тем, если оставим в стороне коэффициенты трения с подшипниками из цинковой бронзы, так как с этими подшипниками не было опытов с большими относительными нагрузками, то отношения средних величин коэффициентов трения, соответствующих наибольшим и наименьшим относительным нагрузкам, обозначая их буквою n, будут

При полной нагрузке, фунт.	2 500	5 000	7 500	10 000
$n=$	1.52	1.91	1.58	2

Каждое из этих четырех чисел более, чем 1.3, и среднее для всех них есть 1.75 — число, почти не отличающееся от отношения между относительными давлениями. На основании этих чисел надо было бы думать, что коэффициенты трения уменьшаются просто обратно пропорционально относительным давлениям. Если бы это было верно, то на основании уравнения (21) надо было бы полагать, что средняя толщина смазывающего слоя совсем не зависит от давления. Такое заключение было бы слишком поспешно и потому неверно.

Изменение относительных нагрузок не было единственным обстоятельством, изменявшим в этих опытах величину коэффициента трения при постоянных полных нагрузках. Большие относительные нагрузки, уменьшавшие величину коэффициента трения, являлись результатом уменьшения длины цапф при одинаковых их диаметрах; чем меньше становилась длина цапфы, тем меньше она гнулась под действием той же самой полной нагрузки. Следовательно изменение коэффициента трения происходило под влиянием одновременного изменения величины относительной нагрузки и изгиба цапфы. Рассмотрение табл. 29 заставляет признать, что уменьшение изгиба цапфы

было одною из причин уменьшения коэффициента трения. Влияние изгиба вовсе не обнаруживается из опытов Гирна, Терстона и Кирхвегера по той причине, что барабан Гирна подвергался таким малым усилиям, которые не могли произвести сколько-нибудь заметного изгиба (§ 82), а цапфы Терстона и Кирхвегера, сдавливаемые подшипниками, приложенными с двух сторон и прижатыми почти взаимно равными усилиями, тоже почти не гнулись. Опыты, сделанные в Геттингене, потому и дороги, что до сих пор они суть единственные, в которых изгибающие силы были и достаточно велики и достаточно разнообразны, чтобы влияние изгиба цапфы на величину коэффициента трения проявилось с полной ясностью. Это свойство коэффициента трения поныне не было никем еще указано. Следовательно, его надо выставить с наибольшею возможною ясностью.

Размеры цапф, подвергнутых испытанию в Геттингене, были:

№		1	2	3	4
Диаметр	дюйм	4	4	4	3.5
	мм	97	97	97	85
Длина	дюйм	5.5	7	8.5	8.5
	мм	134	170	207	207

Гибкости этих цапф при одинаковых величинах и одинаковых расположениях нагрузок относятся между собой почти так же, как числа 1 : 1.8 : 3.7 : 6.7. Но стрелка прогиба наиболее гибкой из этих цапф, № 4, при самом неблагоприятном предположении, что вся наибольшая нагрузка в 10 000 фунт. = 4677 кг. сосредоточена на конце цапфы, будет по формуле

$$\frac{64 \cdot 4677 \cdot 207^3}{3 \cdot \pi 85^4 \cdot 20\,000} \approx 0.27 \text{ мм.}$$

№ цапф	1				2		
Полная нагрузка, фунт.	2 500	5 000	7 500	10 000	2 500	5 000	7 500
Поверхность прикосновения, кв. дюйм	—	—	11	—	—	—	13.9
Давление на кв. дюйм:							
фунт.	227	454	681	908	180	360	540
атм.	18.0	36.0	54.0	72.0	14.25	28.5	42.75
Коэффициенты трения при подшипнике из:							
оловянной бронзы	0.00275	0.00288	0.00408	0.00602	0.00398	0.00575	0.00699
цинковой бронзы	—	—	—	—	0.00506	0.00935	0.01316
оловянного сплава	0.00397	0.00409	0.00386	0.00530	0.00555	0.00729	0.00934
свинцового сплава	0.00526	0.00488	0.00836	—	0.00662	0.00751	0.00970

Истинные стрелки прогиба для цапфы № 4 будут меньше только что вычисленной величины, а для других цапф прогибы будут значительно меньше. Тем не менее, несмотря на всю чрезвычайную малость изгиба, они уже способны заметным образом влиять на величину коэффициентов трения. Чтобы наиболее ясно выставить влияние этого элемента на величину коэффициента трения, составлена табл. 29, в которой сгруппированы коэффициенты трения отдельно для каждой цапфы. Из этой таблицы обнаруживается с совершенною ясностью, что для одной и той же цапфы, соприкасающейся с одним и тем же подшипником, смазанной одним и тем же маслом, иными сло-

Таблица 29

2	3				4			
10 000	2 500	5 000	7 500	1 000	2 500	5 000	7 500	10 000
—	—	—	17.9	—	—	13.2	—	—
720	140	280	420	560	190	388	570	760
57.0	11.1	22.2	33.3	44.4	15.0	30.0	45.0	60.0
0.01000	0.00411	0.00518	0.00675	0.01075	0.00375	0.00495	0.00901	—
0.01200	0.00515	0.00653	0.001250	0.01310	—	—	—	—
0.00991	0.00588	0.00775	0.01000	0.01190	0.00518	0.00741	0.01219	—
0.01031	0.00819	0.00826	0.00901	0.01124	0.00412	0.00529	0.00901	—

вами, при всех одинаковых условиях, насколько это практически выполнимо, коэффициент трения становится тем больше, чем больше изгибается цапфа. Конечно, в таблице есть некоторые аномалии или как бы противоречия только что сказанному, но не следует упускать из виду, что пригонка подшипника в сущности никогда не могла быть совершенно одинакова для всех цапф. По всему вероятию, подшипник был лучше пригнан к цапфе № 4, и потому коэффициенты трения, ей соответствующие, оказались сравнительно меньше других.

Табл. 29 заслуживает тем большего внимания, что в ней обнаруживается влияние изгиба, несмотря даже на то, что

увеличение давления на квадратную единицу поверхности, происходившее при возрастании полного давления на одну и ту же цапфу, постоянно стремилось уничтожить или уменьшить влияние изгиба.

109. Если изгиб имеет влияние на величину коэффициента трения, — а глядя на табл. 29, едва ли можно в этом сомневаться, — то это влияние может происходить не иначе, как при посредстве изменения толщины смазывающего слоя. Влияние изгиба оказалось весьма велико, следовательно и влияние толщины слоя на величину коэффициента трения, даже под большими нагрузками, очень велико. Отсюда следует, что величина ε в знаменателе уравнения (21) имеет гораздо большее значение, чем сумма остальных двух членов $\frac{\mu}{\lambda_1}+\frac{\mu}{\lambda_2}$, что суммою этой можно пренебрегать и что, следовательно, для выражения величины коэффициента трения машинных частей можно останавливаться на уравнении (21а), т. е. писать

$$f=\frac{\mu U}{\varepsilon p}.$$

Глядя на эту формулу, сначала можно подумать, что она никак не может согласоваться с табл. 28 или 29, из которых с полною ясностью обнаруживается влияние материала, употребленного для подшипников, а в уравнении (21) нет ни одного такого элемента, который мог бы заключать в себе влияние этого обстоятельства. Это соображение неверно потому, что толщина слоя смазки, сохраняющаяся при известном давлении, может прямо зависеть от взаимных свойств вещества, смазывающего и смазываемого.

Выводы

110. Выводы, к которым можно притти из разбора вышеописанных опытов, выражая их коротко, сводятся к небольшому числу положений.

Опыты Гирна вполне удовлетворительно подтверждают правильность состава уравнения (21).

Другие опыты прямого подтверждения не доставляют, но доставляют некоторое косвенное подтверждение, и результаты их взаимно связываются при посредстве уравнений (21а), (30) и (32).

Нет ни одного факта, представляемого опытами, противоречащего уравнению (21а); все кажущиеся противоречия легко объясняются влиянием температуры и в высшей степени вероятными различиями в пригонке подшипника. Следовательно, уравнение (21а) может и должно быть принято; точно так же нет повода отказаться и от уравнения (30) при сурепном масле для давлений, не превосходящих 34 атм., а при масле Западной Виргинии — до давлений в 51 атм.

Стало быть, в настоящее время есть большое вероятие предполагать, что для изобильно смазанных машинных частей, у которых взаимное соответствие трущихся поверхностей доведено до высокой степени совершенства, коэффициент трения пропорционален:

1) коэффициенту внутреннего трения жидкой смазки при той температуре, при которой находится этот слой между трущимися поверхностями;

2) скорости относительного движения трущихся поверхностей

и обратно пропорционален:

3) действительно существующей средней толщине смазывающего слоя, помещенного между трущимися поверхностями;

4) давлению, приходящемуся на квадратную единицу поверхности прикосновения трущихся тел;

5) толщина смазывающего слоя при постоянной температуре обратно пропорциональна корню квадратному давления, приходящегося на квадратную единицу поверхности прикосновения;

6) взамен пп. 4 и 5 можно сказать, что при постоянной температуре коэффициент трения обратно пропорционален корню

квадратному из давления, приходящегося на квадратную единицу поверхности прикосновения;

7) температура смазывающего слоя зависит от свойств смазывающей жидкости, от скорости, давления, теплопроводности тел, окружающих смазывающий слой, и от температуры окружающей среды. Для машинных частей, не смазываемых постоянно и достаточно обильно, точно так же как для частей, у которых взаимное соответствие трущихся поверхностей не представляет высокой степени совершенства, коэффициент трения;

8) будет больше, чем в вышеописанных случаях, и

9) увеличение будет зависеть от степени недостаточности притока масла или от степени несовершенства в соответствии одной поверхности с другою;

10) рассматривая степень несовершенства взаимного соответствия поверхностей, надо иметь в виду не только те неправильности, которые остались не уничтоженными при шлифовке поверхностей, но и те отступления поверхностей, которые произойдут от изменения вида трущихся тел под влиянием сил, на них действующих во время трения.

111. В какой мере правильны положения, относящиеся к коэффициенту трения, с тою же степенью точности можно сделать выводы и относительно силы трения, сопровождающей движение машинных частей. Эти выводы необходимо здесь сделать потому, что они покажут нам силу трения совсем в другом виде, чем мы привыкли ее себе представлять, и потому, что они объяснят многие, совсем не ясные до сих пор явления.

Все привыкли издавна считать, что сила трения пропорциональна давлению, а между тем мы увидим, что эта пропорциональность может быть только при соблюдении известных условий, далеко не всегда выполняемых. Величине поверхности прикосновения трущихся частей не приписывают обыкновенно никакого значения, если только она достаточно велика, чтобы

масло не выжималось из промежутка между трущимися частями, а мы увидим, что величина этой поверхности имеет довольно заметное влияние на силу трения, увеличивая ее при своем увеличении. Влияние температуры признавалось одними и отвергалось другими, но никогда не было попытки строго определить зависимость силы трения от этой температуры. Между тем, как мы увидим далее, нет никакого труда определить очень сильное влияние температуры на величину силы трения, правда, не для всех еще масел и не для всех температур, по крайней мере для сурепного, оливкового, спермацетового, в пределах температур от 0 до 60 или 70° С.

112. Сила трения F будет пропорциональна нормальному давлению P, если коэффициент трения

$$\frac{\mu U}{\varepsilon p}$$

останется без перемены.

Чтобы эта последняя величина оставалась без изменения, несмотря на перемены нормального давления, надо, очевидно:

1) чтобы

$$p=\frac{P}{Q},$$

не изменилось, т. е. чтобы поверхности прикосновения были постоянно в одной и той же пропорциональности с величинами нормального давления;

2) чтобы не изменялась величина μ или, все равно, температура смазывающего слоя. Для постоянства температуры t смазывающего слоя надо, чтобы количество развивающейся теплоты было постоянно равно количеству теплоты, отдаваемому машинною частью. Следовательно, надо, чтобы при коэффициенте теплопроводности Δ и внешней температуре t_0

$$\frac{\mu U^2 P}{\varepsilon p E}=\Delta\,(t-t_0).$$

Из этого уравнения видно, что величина t может оставаться постоянною только в таком случае, если t_0 будет изменяться, и притом, чем больше будет P, тем меньше должно быть t_0.

Первое из приведенных условий легко может быть выполнено при устройстве разных машинных частей, предназначенных для разных нагрузок; но если одна и та же машинная часть должна подвергаться разным давлениям, то пропорциональность сил трения с силами нормального давления сохранится только в таком случае, если при каждой перемене давления изменится и величина поверхности прикосновения. Такие изменения поверхности прикосновения обыкновенно не делаются, и потому только в разных машинах, находящихся при соответствующих температурах, силы трения могут быть пропорциональны нормальным давлениям.

113. Силы трения F_1 и F, соответствующие различным нормальным давлениям P_1 и P, при постоянной скорости U и при постоянной величине поверхности прикосновения Q будут соответствовать относительным давлениям

$$p_1 = \frac{P_1}{Q}, \qquad p = \frac{P}{Q}$$

и температурам t_1 и t, при которых внутренние трения будут μ_1 и μ.

Эти силы трения будут

$$F_1 = \frac{\mu_1 U}{\varepsilon_1 p_1} P_1 \quad \text{и} \quad F = \frac{\mu U}{\varepsilon p} P,$$

а отношение между силами трения

$$\frac{F_1}{F} = \frac{\varepsilon p}{\varepsilon_1 p_1} \cdot \frac{\mu_1}{\mu} \cdot \frac{P_1}{P}.$$

Сопоставляя это уравнение с уравнением (31), получим

$$\frac{F_1}{F} = \frac{\mu_1}{\mu} \cdot \frac{P_1}{P} \cdot \sqrt{\frac{p}{p_1}}.$$

Отсюда видно, что отношение F_1/F только в таком случае будет равно отношению P_1/P, когда температура t_1 будет так отличаться от t, что будет удовлетворено уравнение

$$\frac{\mu_1}{\mu}\sqrt{\frac{P}{p_1}} = 1.$$

Если же температура t_1 будет одинакова с температурой t и будет $\mu_1 = \mu$, то, заменив p и p_1 величинами $\frac{P}{Q}$ и $\frac{P_1}{Q_1}$, найдем, что

$$\frac{F_1}{F} = \sqrt{\frac{P_1}{P}},$$

т. е. что силы трения прямо пропорциональны корням квадратным полных нагрузок, или, лучше сказать, нормальных давлений. Почти то же соотношение будет и тогда, когда температуры t и t_1 будут различаться немного. Это условие более или менее удовлетворительно часто выполняется в машинах, и если только не требовать большой степени точности, то последнее уравнение почти всегда может быть применимо.

114. Для таких случаев движения машинных частей, когда, под влиянием данного нормального давления, при постоянной скорости движения, при постоянной внешней температуре и вполне изобильном смазывании, температуры в разных точках трущихся частей установились и не изменяются, можно найти более общую связь между силою трения и величинами, ее определяющими. Эту связь мы можем написать для сурепного масла, пользуясь уравнением (12), представляющим зависимость

между величиною внутреннего трения и температурою, и уравнением (31), представляющим зависимость между толщиною смазывающего слоя и давлением на квадратную единицу поверхности прикосновения. Судя по опытам Гирна, приведенным в табл. 8, 9 и 10, и замечанию о применимости ко всем испытанным им маслам одного и того же найденного им уравнения (§ 84), надо думать, что и уравнение (12) будет удовлетворительно применяться к маслам, испытанным Гирном и перечисленным в табл. 12. Пределы изменения температуры должны быть 0 и 73° (§ 84).

Чтобы выразить искомую нами связь уравнением, заметим прежде всего, что, обозначая внутреннее трение сурепного масла при температуре t буквою μ, можно будет выразить внутреннее трение при той же температуре μ_1 какого-нибудь другого масла произведением

$$A\mu = \mu_1.$$

Величина A определится при посредстве табл. 12. Затем, если при каком-нибудь относительном давлении p_0 толщина слоя смазки при вполне изобильном смазывании была ε_0, то ε, соответствующее давлению p_1, будет определено уравнением (31) и будет

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 \sqrt{p_0}}{\sqrt{p_1}}.$$

Для простоты письма следующих формул обозначим

$$\varepsilon_0 \sqrt{p_0} = \alpha. \tag{33}$$

При этих обозначениях сила трения при вполне изобильном смазывании каким-нибудь маслом и при отличном соответствии трущихся поверхностей будет

$$\frac{A\mu U}{\alpha \sqrt{p}} P,$$

или, так как

$$p=\frac{P}{Q},$$

то

$$\frac{A\mu U}{\alpha}\sqrt{Q}\sqrt{P}.$$

Работа силы трения F в единицу времени выразится формулою

$$\frac{A\mu U^2}{\alpha}\sqrt{Q}\sqrt{P}.$$

Число единиц теплоты, развивающейся в единицу времени, получим после деления последней формулы на механический эквивалент тепла E или умножением разности температур смазывающего слоя t и атмосферы t_0 на коэффициент теплопроводности Δ; следовательно, для установившихся обстоятельств можно написать уравнение

$$\frac{A\mu U^2}{\alpha E}\sqrt{Q}\cdot\sqrt{P}=\Delta(t-t_0). \tag{34}$$

Величина μ на основании уравнения (12) может быть выражена функцией температуры, и если только силы будут выражаться килограммами, а скорости и поверхности метрами, то

$$\mu=\frac{0.0001}{1.4+0.529t+0.0507t^2}.$$

Вставляя вторую часть этого равенства на место μ в уравнение (34), найдем

$$\frac{0.0001\,AU^2}{\alpha E\Delta}\sqrt{Q}\sqrt{P}=(1.4+0.529t+0.0507t^2)(t-t_0). \tag{35}$$

В то же время можно написать, что

$$\frac{FU}{E}=\Delta(t-t_0),$$

откуда

$$l=\frac{FU}{E\Delta}+t_0.$$

Вставляя вторую часть этого равенства на место l в уравнение (35), найдем, что

$$\frac{0.0001\,AU}{\alpha}\sqrt{Q}\sqrt{P}=\Big[1.4+0.529\left(\frac{FU}{F\Delta}+t_0\right)+$$
$$+0.0507\left(\frac{FU}{E\Delta}+t_0\right)^2\Big]F.$$

Приведем это уравнение к обыкновенному виду относительно F и при этом обозначим внутреннее трение, соответствующее температуре t_0, буквою μ_0, так что

$$\mu_0=\frac{0.0001}{1.4+0.529t_0+0.0507t_0^2};$$

в таком случае получим

$$F^3+\frac{0.529+0.1014t_0}{0.0507}\,\frac{E\Delta}{U}F^2+\frac{1}{507\mu_0}\,\frac{E^2\Delta^2}{U^2}F-$$
$$-\frac{1}{507}\,\frac{A}{\alpha}\,\frac{E^2\Delta^2}{U}\sqrt{Q}\sqrt{P}=0. \qquad (36)$$

Это и есть искомое нами уравнение, представляющее зависимость силы трения F от величины нормального давления P, когда даны поверхность прикосновения Q, скорость U, теплопроводность Δ, температура в атмосфере t_0 и соответствующие сорту масла величины A и α.

В виде примера употребления этого уравнения положим, что цапфа вагонной оси такого диаметра, что изгиб ее не оказывает еще чувствительного влияния, поддерживает нагрузку $P=3600$ или 900 кг, что $Q=100$ см^2, скорость $U=1$ м, температура t_0 в одном случае 0° и в другом +20 и —20° C и, наконец, что цапфа смазывается сурепным маслом.

Судя по табл. 12, сурепное масло и оливковое почти не отличаются, следовательно $A = 1$. Для определения α можно обратиться к табл. 16. В этой таблице приведены толщины смазывающего слоя (в мм), под давлением $p = 0.1$ атм., следовательно, выражая толщину ε_0 в метрах при скорости в 1 м, можно сказать, что $\varepsilon_0 = 0.000054$; следовательно

$$\alpha = 0.000054 \sqrt{0.1} = 0.000017.$$

Теплопроводность Δ, подобно принятому в § 99, будем считать в минуту в 0.25, а в секунду $\Delta = 0.004$. Механический эквивалент тепла $E = 425$.

Подставляя все эти числа в уравнение (36), найдем, что величины будут

		при $t =$ 20°	0°	− 20°
$P = 3600$	$F =$	34.3	53.0	75.5
$P_1 = 900$	$F_1 =$	23.2	40.7	64.8
$f =$	$\frac{F}{P} =$	0.0095	0.0147	0.0212
$f_1 =$	$\frac{F_1}{P_1} =$	0.0258	0.0452	0.0720
	$\frac{F}{F_1} =$	1.48	1.30	1.18
	$\frac{P}{P_1} =$	4	4	4

За эти числа, конечно, нельзя ручаться, как за нечто безусловно точное, так как величина теплопроводности Δ вовсе не была еще определена вполне правильно и даже неизвестно, действительно ли можно с достаточною точностью считать ее независимою от температуры; да и величина α еще ждет вполне надежного определения. Но по всему вероятию, характер влияния обрисовывается этими числами довольно удовлетворительно.

Рассматривая две последние строки, тотчас обнаруживается, что при увеличении нормального давления коэффициент трения тоже возрастает, но далеко не пропорционально: при

температуре $t_0 = +20$, когда увеличение коэффициента трения оказывается наибольшим, все-таки отношению между давлениями, равному 4, соответствует отношение между коэффициентами трения всего 1.48, или почти 1.5.

Подобное изменение силы трения при изменении нагрузок на вагонные цапфы не только не опровергается, а скорее подтверждается всем опытом железных дорог, так как известно, что сопротивление, представляемое тремя порожними вагонами, почти равно сопротивлению, представляемому двумя гружеными, тогда как вес трех порожних вагонов около 20 т, а двух груженых около 33 т.

Различие сил трения, соответствующих разным температурам, тоже подтверждается практикою железных дорог. Расход топлива зимою на единицу перевозимого груза возрастает раза в полтора и только потому меньше отношения между коэффициентами, соответствующими 20 и —20°, что, во-первых, средние температуры зимы и лета немного отличаются одна от другой, как +20 и —20° C, и что, во-вторых, некоторые сопротивления поезда остаются без перемены как летом, так и зимою.

Влияние величины поверхности прикосновения трущихся частей совершенно подобно влиянию полного груза, так как в уравнении (36) Q и P входят в один и тот же член и оба стоят множителями под знаками радикалов. Отсюда следует, что значительные изменения величины поверхности прикосновения немного изменят величину силы трения и что, чем ниже будет температура t_0, тем меньше будет влияние величины поверхности прикосновения.

Изменение толщины слоя будет изменять величину α; чем меньше будет толщина слоя, тем меньше будет α и, стало быть, тем больше будет сила трения.

Влияние свойств смазывающей жидкости на величину силы трения F проявляется в уравнении (36) через посредство отношения $\frac{A}{\alpha}$.

Если бы на место сурепного масла было взято спермацетовое, то на основании § 91 нашли бы $A = 0.4$ и на основании табл. 16, что

$$\alpha = 0.0000113;$$

следовательно, $\frac{A}{\alpha} = 28\,000$ вместо 58 800, соответствовавшего сурепному. Это значит, что при сурепном масле последний член уравнения (36) будет почти в два раза больше, чем при спермацетовом, т. е. увеличится точно так же, как при увеличении нагрузки в 4 раза, а отсюда можно заключить, что, в то время когда внутреннее трение возросло в 2.5 раза, сила трения возрастает менее чем в 1.5 раза.

115. Относительно минеральных масел, несмотря на всю громадность их употребления и у нас и за границей, несмотря на то, что они уже вытеснили во множестве случаев масла растительные, мы не имеем до сих пор никаких надежных опытов, способных указать зависимость между температурою их и их внутренним трением. Это отсутствие опытов лишает нас возможности показать зависимость силы трения от различных обстоятельств при смазывании минеральными маслами.

116. В машинах, еще не достигших постоянства температур во всех своих точках, как всегда бывает в начале движения, когда части их еще согреваются на счет теплоты, развиваемой трением, трудно теперь показать правильную зависимость силы трения от нормального давления и других обстоятельств, но можно сказать, что в эти периоды времени температуры смазывающего слоя будут ниже тех температур, которые соответствуют периодам установившихся обстоятельств, и, следовательно, во время согревания частей до нормальной температуры силы трения будут более, чем при нормальных температурах, соответствующих установившимся обстоятельствам. Различие сил трения будет тем больше, чем больше будут разницы температур.

117. В тех случаях, когда некоторые части трущихся поверхностей прикасаются одна к другой непосредственно и другие части их отделены слоем смазывающей жидкости, силы трения не поддаются никакому определению. Невозможность решения этого вопроса проистекает из того, что решительно нельзя определить, какая именно доля полного давления придется на части, прикасающиеся непосредственно, и какая часть давления — на поверхности смазанные. Между тем это подразделение полного давления совершенно необходимо.

Обозначая через f_1 коэффициент трения несмазанной части, соответствующий давлению P_1, и через f_2— коэффициент трения смазанной части, соответствующий давлению P_2, мы должны были бы написать, что сила трения F определится из уравнения

$$F = f_1 P_1 + f_2 P_2$$

или, обозначая полное давление через P, написать, что

$$F = \left(f_1 \frac{P_1}{P} + f_2 \cdot \frac{P_2}{P} \right) P.$$

Если бы $f_1 = f_2$ или если бы f_1, по крайней мере, мало отличалось от f_2, то можно было бы найти F без большой погрешности и не зная отношений P_1 и P_2 к P; но так как f_1 и f_2 могут отличаться один от другого чрезвычайно сильно, например, когда $f_1 = 0.2$ (§ 10), f_2 может быть равно всего 0.01 и даже 0.002 (§ 94), то величина F очень сильно будет зависеть от величины P_1 и P_2.

Например, если $P_1 = 0.1\,P$, $P_2 = 0.9\,P$, $f_1 = 0.2$ и $f_2 = 0.004$, то

$$F = 0.0236P,$$

а если, при тех же величинах f_1 и f_2, $P_1 = 0.9\,P$ и $P_2 = 0.1\,P$ то

$$F = 0.1802P.$$

Вторая величина F в 7.6 раза больше первой.

118. Все вышеприведенные положения, касающиеся зависимости коэффициента трения от разных обстоятельств, довольно вероятны, но бесспорными их еще нельзя назвать. Их можно отвергнуть или сделать несомненными, по крайней мере, с известною степенью приближения, только путем опытов, способных доставить материал, годный для проверки более строгой, чем до сих пор было сделано. Подобные опыты теперь совершенно необходимы для техники, если только есть желание прекратить блуждание впотьмах по такому важному вопросу, как вопрос о трении машинных частей, для которых коэффициент трения может изменяться в пределах от 0.0019 (см. табл. 17) до 0.5083 (см. табл. 11), другими словами, почти от 1 до 250.

В настоящее время техник, определяющий величину коэффициента или силы трения для данной машинной части и пользующийся ходячими правилами и данными, легко может ошибиться в 10, а может быть, и более чем в 10 раз.

Для предсказания величины коэффициента трения даже в самых лучших условиях, если пришлифовка трущихся поверхностей будет доведена до высокой степени совершенства, если силы, действующие на трущиеся части, вовсе не будут изменять взаимного соответствия трущихся поверхностей, если смазывающая жидкость будет доставляться в полном изобилии, нам недостает еще многих, безусловно необходимых знаний.

Нам надо знать:

1) величину внутреннего трения смазывающей жидкости, соответствующую какой-нибудь определенной температуре;

2) зависимость величины внутреннего трения смазывающей жидкости от температуры;

3) зависимость между толщиною смазывающей жидкости и определяющими эту толщину: скоростью, давлением, приходящимся на единицу поверхности прикосновения трущихся тел, свойствами смазываемых металлов и температурою;

4) закон передачи теплоты от смазывающего слоя к окружающей среде.

119. Когда все только что перечисленные познания будут приобретены, тогда для случаев наилучшей пришлифовки отсутствия изменения взаимной соответственности поверхностей и полного изобилия смазывающей жидкости нам откроется возможность предсказать величину коэффициента и силы трения для каждой исследованной жидкости, соответствующих данным: скорости относительного движения трущихся поверхностей твердых тел, давлению, которое придется на квадратную единицу поверхности, свойствам металлов, из которых сделаны части, температуре окружающей среды и теплопроводности трущихся частей.

Мало того, можно будет отыскать все те условия, при которых работа трения при употреблении данного смазывающего материала сделается наименьшею.

Очевидно, что как только этот последний вопрос будет разрешен для каждой из употребляемых смазочных жидкостей, вопрос о выборе смазочного материала перейдет в область наиболее простых, доступных для каждого.

Разрешение всех перечисленных в предыдущем параграфе вопросов еще не исчерпывает, однако, всего вопроса, не может удовлетворить не только всем без изъятия, но даже и всем существенно важным потребностям техники.

В действительной жизни, в ежедневной практике техники далеко не всегда имеют дело с машинными частями, у которых поверхности прикосновения наилучшим образом соответствуют одна другой; тут встречаются и недостаточная точность пригонки или пришлифовки и утрата соответствия хорошо пришлифованных поверхностей под действием сил, приложенных к машинным частям во время их обычного хода. Смазывающая жидкость в редких только случаях доставляется безукоризненно. Некоторый недостаток ее между трущимися поверхностями

является иногда вследствие неудовлетворительности действия приборов или приспособлений, доставляющих смазывающую жидкость, иногда вследствие дурного состояния краев подшипников.

Силы трения, наиболее важные для техники и потому наиболее интересные для техников, конечно, те, которые соответствуют наиболее вероятной совокупности обстоятельств, обусловливающих и соответствие поверхностей одна другой, и приток смазывающей жидкости в промежуток между смазываемыми частями.

Поэтому надо изучить: 1) современное значение этой наиболее вероятной совокупности; 2) то влияние, которое может иметь на него более или менее высокая степень совершенства в пришлифовке, и 3) различную степень гибкости цапф и все другие подобные обстоятельства; 4) влияние изобилия в притоке смазочной жидкости и 5) влияние различного состояния краев трущихся тел.

Только такое полное и всестороннее исследование силы трения поставит ее наряду с теми силами, которыми мы можем в большей или меньшей степени располагать по произволу, покажет нам, какими способами или средствами мы будем иметь возможность заставить эту силу изменять свою величину в данном направлении; рассеет многие наши заблуждения, касающиеся вопросов трения, и поможет правильно разрешать такие, например, вопросы, как вопрос об определении размеров цапф или об определении давления, приходящегося на квадратную единицу поверхности прикосновения подшипника с цапфою, или, наконец, о выборе сплава для подшипников.

120. В настоящее время техники при разрешении вопроса о размерах цапфы определяют ее диаметр, ставя в основание своих суждений условия прочности и то соображение, что чем меньше диаметр цапфы, тем меньше пути, проходимые точками приложения сил трения, и, следовательно, тем меньше работа

сил трения. Длина цапф определяется в зависимости от диаметра не одинаково для различных металлов. Так, например, Рело дает следующие определения размеров цапф, обозначая через P — усилие, действующее на цапфу, в кг; d — диаметр цапфы в мм; l — длину ее

для железных цапф

$$d=\frac{9}{8}\sqrt{P} \quad \text{и} \quad l=1.5d,$$

для стальных цапф

$$d=0.95\sqrt{P} \quad \text{и} \quad l=1.78d.$$

Относительную гибкость этих цапф, назначенных для одной и той же нагрузки, можно охарактеризовать стрелками прогибов, предполагая, например, равномерное распределение всего груза по длине цапфы.

При этом предположении стрелка прогиба f определится в зависимости от груза P и коэффициента упругости E уравнением

$$f=\frac{8Pl^3}{\pi E d^4},$$

и на основании вышеприведенных формул стрелки прогиба будут для железных цапф

$$f=\frac{24}{\pi E}\sqrt{P},$$

для стальных цапф:

$$f_1=\frac{47.5}{\pi E}\sqrt{P}.$$

Известно, что коэффициент упругости E один и тот же как для железа, так и для стали; следовательно, стальная цапфа будет гнуться почти в два раза более железной.

Подобное же соотношение между гибкостями находим и для цапф № 1 и 2 (см. § 106), ибо при равенстве диаметров этих цапф их стрелки прогиба будут прямо пропорциональны кубам их длины, т. е. $(5.5)^3$ или 7^3, или 166 и 343, коэффициенты же трения цапфы № 1 почти в 1.75 меньше коэффициентов трения цапфы № 2.

Это сопоставление дает право предполагать, что, поступая по правилам Рело, получим на стальных цапфах силу трения почти в 1.75 раза большей величины, чем на железных цапфах; а работа трения при равном числе оборотов, при стальной цапфе будет во столько раз больше работы трения при железной цапфе, во сколько раз $1\frac{3}{4}\cdot 0.95 > \frac{9}{8}$, т. е. почти в 1.5 раза больше.

Отсюда ясно, что если только хорошо сделанные опыты подтвердят разультаты, приведенные в табл. 29, то уменьшение диаметра стальных цапф сравнительно с железными, допускаемое большею прочностью стали и делаемое с тою единственною целью, чтобы уменьшить работу трения, не только этой цели не достигает, а напротив, приводит к результатам прямо противоположным.

Весьма вероятное большое увеличение работы трения, вызываемое почти всюду принятым правилом устройства цапф, удерживающимся в практике по недостатку наших знаний, касающихся вопросов трения, конечно, можно считать довольно сильною побудительною причиной, чтобы изыскивать средство для проверки этого правила, чтобы стараться отыскать такие соотношения между силами, скоростями и размерами, при которых работа трения на цапфах сделалась бы наименьшею.

121. Давление на единицу поверхности определяется теперь чисто эмпирическими правилами, и даже еще чаще не следуя никаким правилам, а по какому-то личному усмотрению. А между тем этот вопрос далеко не маловажен. Было уже

показано, что если не всегда, то во многих случаях коэффициент трения уменьшается при увеличении относительного давления. Величину наивыгоднейшего давления на единицу поверхности можно будет определить только после глубокого изучения вопроса о трении. Способ отыскания будет следующий.

Обозначим через $\varphi(t)$ ту функцию температуры, которая представляет величину внутреннего трения избранной смазывающей жидкости; через $\psi(u, p, t, c)$ ту функцию, которая выразит толщину смазывающего слоя ε в зависимости от скорости u, относительного давления p, температуры t и степени изгиба цапфы c. Тогда коэффициент трения будет

$$\frac{\varphi(t)\,U}{\psi(u, p, t, c)\,p}.$$

Далее, обозначим через P силу, прижимающую подшипник; тогда работа силы трения в единицу времени будет

$$\frac{\varphi(t)\,U^2P}{\psi(u, p, t, c)\,p}.$$

Наконец, коэффициент передачи теплоты от смазывающего слоя к окружающей атмосфере с температурой t_0 обозначим через Δ.

Тогда при установившихся обстоятельствах, когда количество теплоты, развивающейся вследствие трения, сделается равным с количеством теплоты, отдаваемым смазывающим слоем, и называя E механический эквивалент теплоты, можно будет написать уравнение

$$\Delta(t - t_0) = \frac{\varphi(t)\,U^2P}{\psi(u, p, t, c)\,p} \cdot \frac{1}{E}.$$

Пользуясь этим уравнением, можно будет определить величину t, которая, очевидно, будет функцией U, p, c, P, Δ

и t_0; вставив эту функцию на место t в выражение работы силы трения, т. е. в

$$\frac{\varphi(t)\,U^2 P}{\psi(u,\ p,\ t,\ c)\,p},$$

можно будет отыскать, при какой величине p работа трения сделается наименьшею. Очевидно, что величина p будет, вообще говоря, не одинакова для различных полных давлений P, для различных скоростей U, различных гибкостей c, различных способностей передавать теплоту Δ и различных температур окружающей атмосферы t_0.

122. Вопрос о выборе сплава для подшипников уже не раз поступал на очередь, но никогда не был правильно разрешен, да по существу дела и не мог быть разрешен. Всегда влияние сплава проявлялось в совокупности с другими влияниями. Подразделить влияния не имели средств, и потому нет ничего удивительного, что приходили к результатам противоречивым. Так, по опытам Кирхвегера, коэффициент трения при сурепном масле для железных и стальных осей и для подшипников из оловянного сплава [1] и из твердого свинцового сплава заключается между 0.0090 и 0.0099, а для бронзовых подшипников (оловянной бронзы) [1] средняя величина коэффициента 0.0141, т. е. коэффициент трения при бронзовых подшипниках в 1.5 раза больше, чем при подшипниках из оловянного сплава.

В то же время по опытам в Геттингене, причем не указано смазывающее вещество, результаты были получены прямо противоположные. Из табл. 29 видно, что средняя величина всех коэффициентов трения, относящихся к оловянной бронзе, есть 0.00584, а для всех коэффициентов, относящихся к оловянному сплаву, 0.00931. Второе из этих двух последних чисел не меньше, а больше первого в 1.25 раза. При том различии

[1] Состав сплавов см. в конце § 87, примечание.

условий, при которых производились опыты Кирхвегера и геттингенские, теперь трудно сказать, что именно следует приписать различию свойств сплава, хотя они и приготовлялись по одинаковым рецептам, и что должно быть отнесено к влиянию других обстоятельств.

Организация будущих опытов

123. Недостатки всех предшествующих опытов вызывают потребность в новых; что именно должно быть определено, изучено при посредстве новых опытов, было уже выше изложено (§ 118 и 119). Главные черты организации необходимых опытов указать нетрудно.

1) Зависимость коэффициента внутреннего трения смазывающих жидкостей от температуры надо изучать или посред ством крутильных весов Кулона, поступая подобно тому, как делал О. Е. Мейер (§ 1), или, может быть, еще лучше, посредством прибора Пуазейля. Прибор Пуазейля во всяком случае гораздо проще крутильных весов. Определяя коэффициенты внутреннего трения при разных температурах прибором Пуазейля, безусловно необходимо вполне удостовериться, что закон Пуазейля применяется к данному частному случаю с достаточною степенью точности.

2) Для изучения зависимости между толщиной смазывающего слоя ε, относительным давлением p, скоростью U, температурою слоя t надо иметь прибор, вроде прибора Терстона, у которого цапфа не изгибалась бы усилиями, прижимающими к ней подшипники. Цапфа эта должна быть пустая и так приспособлена, чтобы через нее можно было пропускать струю воды, охлаждающей или подогревающей цапфу. Смазка должна доставляться к верхнему и нижнему подшипникам особыми каналами. Надо иметь возможность доставлять ее к тому и другому подшипнику в полнейшем изобилии. Скорость вращения цапфы должна по возможности правильно измеряться во все время

опыта. Пришлифовка поверхностей прикосновения подшипников и цапфы должна быть доводима до возможной степени совершенства.

В таком приборе необходимо прежде всего изучить зависимость между T — температурою шарика, помещенного в подшипнике ψ, температурою t смазывающего слоя или температурою на поверхности цапфы, которая, по всему вероятию, будет мало отличаться от средней температуры слоя, и температурою окружающей среды.

С таким прибором, для которого будет известна зависимость между температурами, можно будет изучить величину средней толщины смазывающего слоя различных смазывающих жидкостей и зависимость этой толщины от относительного давления, скорости и температуры. Само собой разумеется, что при изучении влияния этих переменных величин надо будет изменять их поочередно, оставляя другие переменные без изменения. Например, если обозначим относительные давления, скорости и температуры, при которых предполагается сделать опыты, через

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots,\ p_i,$$
$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_m,$$
$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ \ldots,\ t_n,$$

то число опытов N будет определено уравнением

$$N = i \cdot m \cdot n.$$

Очевидно, что число N будет расти очень быстро при возрастании чисел i, m, n.

Если же число смазывающих масел назовем s и число сплавов, предназначаемых для испытания, назовем w, то число комбинаций опытов будет

$$N_1 = w \cdot s \cdot i \cdot m \cdot n.$$

Стоит себе представить, что каждое из чисел w, s, i, m, n не более 4, чтобы увидеть, что время, которое понадобится для опытов, будет очень велико: так,

$$N_1 = 4^5 = 1024.$$

Число отдельных опытов, конечно, будет гораздо больше, так как каждую комбинацию опытов для проверки правильности результатов придется повторять.

Ознакомившись с толщиною слоя при вполне изобильном притоке смазки, надо будет произвести опыты при меньших количествах притекающей смазки.

3) Влияние изгибов цапфы надо изучать на таком приборе, в котором был бы только один подшипник. В этом приборе опять-таки надо изучить зависимость между температурою смазывающего слоя и температурою в атмосфере. Затем произвести опыты с такими силами, которые не гнули бы заметным образом цапфу, и потом, сравнивая результаты, получаемые при изгибах цапфы, с результатами, соответствующими неизогнутым цапфам, можно будет определить влияние изгиба.

Таковы должны быть в главных чертах организация и характер опытов, которые можно будет назвать научными.

124. Опыты технические, столь же необходимые, как и опыты научные, будут состоять в том, чтобы определить влияние теплопроводности данной машинной части, влияние несовершенства при шлифовке трущихся поверхностей и влияние несовершенства притока смазывающей жидкости.

Влияние теплопроводности, обусловливающей температуру смазывающего слоя, всегда будет чрезвычайно велико, так как для всех смазывающих жидкостей внутреннее трение сильно изменяется даже при небольших изменениях температуры. Незнакомство с теплоемкостью и теплопроводностью разных машинных частей и машин, с которыми производились испытания смазочных материалов, есть главнейшая причина того,

иногда крайнего несогласия между ожиданиями, основанными на результатах опытов с той или другой машиной, и результатами действительного употребления смазывающего вещества.

Разные машинные части, сообразно со своею конструкцией, имеют далеко не одинаковые теплоемкости и теплопроводности. При совершенно одинаковых условиях сообщения им теплоты они будут приобретать вовсе не одинаковые температуры, а если температура трущихся поверхностей в одной машине будет, например 20°, тогда как в другой 30°, то при смазывании сурепным маслом коэффициенты внутреннего трения будут относиться между собой, как 2 : 1, а следовательно, при всех прочих равных обстоятельствах и силы трения будут в том же отношении, как 2 : 1.

Как следует поступать для определения теплоемкости и теплопроводности, мы не будем здесь говорить, так как это касается не характеристики в организации опытов, а самих приемов.

Несовершенство притока смазывающей жидкости происходит оттого, что для множества машинных частей еще не придуманы приборы, способные доставлять смазку вполне равномерною струей. Влияние неравномерности в притоке было уже неоднократно указываемо, но, чтобы еще рельефнее представить всю важность влияния температуры и притока, я воспользуюсь словами Гирна. Гирн, разбирая различные приемы производства опытов, рекомендует прежде всего изучение свойств смазывающего масла при полнейшем изобилии в притоке.

Затем он говорит:[1] «Но в сущности мы видим, что этот способ совершенно выходит из обыкновенных условий, при которых совершается трение в наших машинах; ни одна из частей их так не смазывается. А из того, что масло

[1] *Hirn*. Études, p. 221. Bull. Soc. Industr. de Mullhouse, t. XXVI, 1854.

оказывается хорошим в таких условиях, мы не имеем ни малейшего права заключить, что оно будет также хорошо в машинах; что говорю я! — мы не будем вправе заключить даже и то, что его можно будет употреблять для машин. В первое время моих занятий этими опытами я слишком много раз впадал в эту ошибку».

Влияние пригонки было тоже уже не раз показано.

В технических опытах, определив теплоемкость и теплопроводность, можно будет определить по формулам (§ 118) величину коэффициента трения для каждого сорта масла, предполагая наиболее изобильное смазывание и наилучшую пригонку.

Затем надо будет принять меры, чтобы во время опытов воспроизвести по возможности ближе все те условия смазывания и пригонки, которые обыкновенно появляются в практической жизни.

Обстоятельства эти не поддаются никакому точному определению. Обстоятельства, соответствующие каждому частному случаю, будут непременно более или менее отличаться от обстоятельств, так сказать, средних. Каждый опыт даст результат, более или менее отклоняющийся от среднего или в ту, или в другую сторону. Устранить влияние этих погрешностей можно будет только большим числом опытов. При этом совершенно необходимо, чтобы каждое из обстоятельств, способных видоизменять результат наблюдения, действительно повлияло и притом в той же соразмерности с влиянием других обстоятельств, как это бывает в обыденной жизни.

Деталей производства опытов вовсе не будем здесь разбирать.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОПЫТОВ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТРЕНИЯ МАШИН В ПРИМЕНЕНИИ ИХ К ЖЕЛЕЗНЫМ ДОРОГАМ И БУМАГОПРЯДИЛЬНЯМ

С тремя приложениями: элементарного вывода формул, выражающих силу трения цапфы и пяты; описания способов и приборов для определения трения жидкостей; описания приборов и способов испытания трения в машинах

Без светоча теории практика не может итти к истинному совершенствованию.

Понсле

Причины, вызвавшие опыты

Опыты и вообще исследования над трением жидкостей и машин, о которых здесь будет говориться, останавливаясь по преимуществу на главных практических результатах в применении к железным дорогам и отчасти к прядильным мануфактурам, были вызваны множеством затруднений, испытанных железнодорожными техниками при введении у нас минеральных масел взамен обыкновенно употреблявшегося сурепного, а в иных случаях, и деревянного масел.

Минеральные жидкости, по составу своему чрезвычайно разнообразные, иногда столь же пригодные для смазывания машин, как и лучшие органические масла, оказываются нередко крайне неудовлетворительных свойств, бывают способны развивать весьма значительное трение. Вполне добросовестные заводчики очень часто поставляли под одним и тем же торговым названием масла чрезвычайно различных смазывающих способностей и поступали так только потому, что, подобно всем другим техникам, не имели способа определять достаточно верно смазывающую способность данного продукта. Технические условия, выработанные лучшими техниками и учеными, ограничиваясь требованиями, относящимися к очистке, плотности и температурам вспышки и воспламенения, останавливаясь на свойствах, недостаточных для определения способности

смазывания. Вполне руководствуясь существовавшими и во множестве случаев сохраняющими до сих пор свою силу техническими условиями, можно было признать одинаковыми два масла, сильно различавшиеся по своему существу. При таких условиях выбор надлежащего масла становился делом случая, удачи; а между тем неудачный выбор смазывающей жидкости влек за собою часто очень многие затруднения и еще более часто, хотя и не бросающиеся в глаза, но вполне заслуживающие внимания техников, излишние расходы топлива.

Различие расходов топлива, зависевших от смазывающей жидкости, прежде всего и притом давно уже были замечены на бумагопрядильнях. На этих фабриках при употреблении сурепного масла тратилось на трение в машинах, станках и приводах около 40% всего расходуемого топлива, а при смазывании тех же механизмов спермацетным маслом тратилось только около 27%. Замена первого масла вторым доставляла сбережение в расходах топлива почти в 18%. Это явное различие вынуждало фабрикантов и техников ожидать, что и другие смазывающие жидкости могут оказывать подобное же влияние, и, не находя никаких указаний в этом отношении не только в физике, но и в знаменитых опытах Куломба и Морена, бумагопрядильные фабриканты-техники были вынуждены сами предпринять опыты. В 1854 г. появились описания опытов Густава Дольфуса и известного теперь физика Густава Гирна. Оба ряда опытов вполне заслуживают внимания техников, но опыты Гирна доставили наиболее замечательные результаты. Они показали самым несомненным образом, что принимаемые еще и поныне законы трения Куломба — Морена, вообще говоря, не могут быть признаны даже и приблизительно верными; что ими можно пользоваться только в тех случаях, в которых все условия развития трения достаточно близко подходят к условиям, бывшим при опытах Куломба и Морена; что при достаточном различии условий,

при которых происходит трение, величины коэффициентов трения могут сильно отличаться от величин, указанных Мореном. Но, доставляя эти важные для техники и для науки результаты, опыты Гирна не показали никакой связи между смазывающею способностью масла и его физическими или химическими свойствами.

Следовательно, ни Дольфус, ни даже Гирн не разрешили главного вопроса о правильном для данного случая выборе смазывающей жидкости; а опыты Гирна показали еще вдобавок, что для определения величины силы трения нельзя пользоваться законами Куломба — Морена, если только интересующее нас явление происходит не при той обстановке, при которой происходили опыты этих двух ученых.

Несомненно, доказанное различие смазывающих способностей различных веществ и указание возможности значительных ошибок в расчетах, основанных на законах Куломба — Морена, если только машины, для которых делаются расчеты, не находятся в той же обстановке, в какой находились приборы Куломба и Морена, побудило и железнодорожных техников и инженеров произвести опыты в той самой обстановке, которая встречается при движении поездов по железным дорогам. Хотя расходы топлива даже на незначительных железных дорогах несравненно больше, чем на какой бы то ни было бумагопрядильне, но так как трение в поездах железных дорог поглощает менее значительную долю работы двигателя, чем на бумагопрядильне, и так как полная работа паровозной машины зависит еще от очень многих, трудно уловимых обстоятельств, то задача железнодорожных инженеров оказалась несравненно труднее задачи техников бумагопрядильных, и на железных дорогах не удалось решить даже такого сравнительно грубого вопроса, как то: когда больше расходуется топлива — при смазывании ли маслом или при смазывании салом? Поэтому-то, несмотря на множество опытов, сделанных инженерами разных стран, и теперь еще в большинстве случаев

выбором смазывающего масла руководят разные личные соображения, а не ясные экономические расчеты.

Если так ведется дело еще и теперь, то очевидно, что в ту пору, когда входило у нас в употребление масло из бакинской нефти, оно было не в лучших условиях. Дешевизна этих масел побуждала к введению их, а неуменье отличить хорошего от дурного доставило немало хлопот и горя многим нашим инженерам, непосредственно стоявшим у дела. Поэтому все они с нетерпением ждали появления такого способа исследования масел, который дал бы верное средство отличить годное от негодного. Вместе с другими думал о том же предмете и я.

Вглядываясь во все сделанное многими инженерами и учеными для изучения законов трения и вдумываясь в причины безуспешности разъяснения того влияния, которое оказывают свойства смазывающей жидкости на силу трения смазанных ею твердых тел, нельзя было оставить без внимания совершенное отсутствие всякой попытки найти объяснение сущности или схемы явления, и принимая в расчет замечания практиков-инженеров, что для смазывания машин можно употреблять только такие жидкости, которые действием сил, сжимающих трущиеся твердые тела, во время надлежащего движения машины не вытесняются из промежутка, предназначенного для смазывающей жидкости. Это замечание заслуживает тем большего внимания, что оно общеизвестно и настолько признается правильным, что для обозначения качества масла не вытесняться давлением трущихся частей, английские техники имеют особое слово — body. Несмотря на всю кажущуюся незначительность этого замечания, оно на самом деле чрезвычайно плодотворно и способно заставить глядеть на трение смазанных твердых тел с совершенно новой точки зрения.

Если же смазывающая жидкость должна обладать таким свойством, чтобы не вытесняться, то это нельзя понимать иначе, как так, что во время движения смазывающий слой должен совершенно отделять одну металлическую поверхность

от другой, не допуская их взаимного прикосновения, ибо как только прикосновение твердых тел произойдет и они сами представят сопротивление к дальнейшему их сближению, то во впадинах твердых тел будет держаться всякая жидкость помимо какого-то особого свойства, названного англичанами body.

Если же жидкий слой, смазывающий два твердых тела, вполне отделяет их одно от другого, то непосредственного трения твердых тел уже, очевидно, быть не может. Что же касается самого жидкого слоя, то во время движения машины одни части его, прилегающие, например, к неподвижному подшипнику и задерживаемые им, сами или совсем не двигаются, или двигаются очень медленно; другие части слоя, прилегающие к двигающей ее поверхности цапфы и увлекаемые ею, или двигаются с такой же скоростью, как и сама поверхность, или их скорость отличается немного от скорости поверхности, и они отстают. Ясно, что разные части одного и того же слоя, двигаясь с неодинаковыми скоростями, получают относительное движение, вызывающее трение внутри жидкого слоя. Движение частиц жидкости относительно твердых поверхностей вызывает внешнее для слоя трение жидкости с твердыми телами.

Следовательно, сила трения твердых, хорошо смазанных тел, отделенных одно от другого жидким слоем, вызывая движение этого слоя относительно твердых тел и движения внутри самого слоя, состоит из некоторой совокупности сил трения жидкого слоя с твердыми телами и сил трения, развивающихся внутри самого жидкого слоя.

Как только явление рассматривается с этой точки зрения, так тотчас же вопрос о силе трения двух хорошо смазанных твердых тел сам собою переходит в область гидродинамики и вместе с тем обнаруживаются те физические свойства смазывающих жидкостей, которые могут оказывать влияние на силу трения твердых тел, смазанных этими жидкостями. Свойства эти, очевидно, суть: внутреннее трение смазывающей жидкости и ее внешнее трение с твердыми телами.

Остановившись на этой точке зрения, я теоретически решил вопрос в 1882 г.[1] И эта новая теория подала надежду, что путем новых опытов можно будет разрешить многие вопросы, касающиеся трения, не поддававшиеся до того времени никаким разъяснениям наблюдателей. Но так как все гидродинамические вопросы, подобные рассматриваемому, разрешаются не иначе, как при некоторых предположениях, хотя и весьма вероятных, но во всяком случае не достоверных, то для практических применений теоретически полученных результатов необходимо было опытом проверить эти результаты. Проверочные опыты требовали еще других предварительных опытов над неисследованным еще до того времени внутренним трением различных смазывающих жидкостей.

Все такие опыты уже сделаны: испытано было более ста образцов смазывающих жидкостей и опытов, проверявших теорию трения в машинах, сделано было 627. Полное и подробное описание всех опытов уже напечатано, а здесь будет итти речь, как сказано вначале, только о главнейших, наиболее выдающихся практических результатах сделанного исследования и о некоторых дополнительных опытных данных, важных для техники и не вошедших в вышеупомянутое описание.

Главные результаты гидродинамической теории трения машин и опытов над трением жидкостей и машин

Главнейший результат теоретического исследования состоит в том, что:

F — сила трения двух твердых смазанных тел — зависит от

μ — силы трения, развивающейся внутри жидкости на поверхности, равной единице, при относительной скорости равной единице; от

[1] Инж. журн., 1883, № 1, 2, 3 и 4. «О трении в машинах».

λ и λ_1 — сил трения, развивающихся на поверхностях прикосновения жидкого слоя с тем и другим из смазываемых им тел, когда поверхности имеют величину, равную единице, при скоростях скольжения слоя по поверхностям, равных единице; от

U — скорости относительного движения одной из твердых поверхностей по другой; от

Q — поверхности взаимного прикосновения твердых тел, если бы не было смазывающего слоя, и от

ε — средней толщины смазывающего слоя.

f — коэффициент силы трения — зависит еще от

p — нормального к поверхностям давления, прижимающего смазывающий слой и приходящегося на квадратную единицу поверхности трения.

Математические формулы,[1] выражающие связь между вышеуказанными величинами, имеют вид

$$F = \frac{\mu \cdot v \cdot Q}{\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}}; \qquad (1)$$

$$f = \frac{\mu \cdot v}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right) p}. \qquad (2)$$

Величины μ, λ и λ_1, почти совсем доныне остававшиеся неисследованными, при изучении их оказались[2] для разных жидкостей различными; в особенности величины μ отличаются крайним различием. Величины отношений $\frac{\mu}{\lambda}$ и $\frac{\mu}{\lambda_1}$ оказались очень небольшими сравнительно с величинами ε, и потому обнаруженное влияние этих отношений на величины F и t относится к числу второстепенных.

[1] В конце статьи приведен элементарный вывод этих уравнений.

[2] См. приложение под заглавием «Способы и приборы для определения внутреннего и внешнего трения жидкостей».

Величины внутреннего трения μ для некоторых жидкостей. выраж ен
Плотности δ выражены в долях плот

Температура, °C	Масла органического происхождения				Вода при 4° $\delta=1$	Жидкости	
	спермацетовое при 19° $\delta=0.884$ 0.883	оливковое при 18° $\delta=0.9155$ 0.9166	сурепное при 19° $\delta=0.9155$ 0.9145 0.9128	касторовое при 17.5° $\delta=0.9633$		керосин при 22° $\delta=0.8215$	солярное масло при 22° $\delta=0.8638$
17.5				0.12300	0.000109_5	0.000019_0	0.00072_2
20	0.00360	0.00845	0.00937	0.09900	0.000103_0	18_1	64_4
22.5	326	752	837	8110	0.000097_0	17_2	60_0
25	293	674	750	6720	0.000091_6	16_4	55_9
27.5	270	604	673	5576	0.000086_6	15_7	51_9
30	246	541	606	4636	0.000082_1	15_0	48_3
32.5	226	488	548	3868	0.000077_8	14_4	45_0
35	208	440	495	3248	0.000074_0	13_8	42_1
37.5	191	398	449	2744	0.000070	13_2	39_3
40	177	361	409	2331	0.000067_7	12_7	36_9
42.5	164	332	374	1990	0.000064_2	12_3	34_6
45	152	304	342	1715	0.000061_2	11_9	32_7
47.5	142	280	315	1490	0.000059_0		30_9
50	132	257	290	1306	0.000056_9		29_2
52.5	124	237	268	1150			27_6
55	116	220	248	1018			26_2
57.5	109	205	229	901			24_8
60	102	190	214	797			23_5
62.5	96	177	200	704			22_1
65	91	165	187	623			21_3
67.5	86	155	174	555			20_4
70	82	145	162	495			19_5

Таблица 1

ные в миллиграммах, приходящиеся на 1 мм² при скорости в 1 мм/сек.
ности дистиллированной воды при 4° С

минеральные из бакинской нефти

олеонид Ра-гозина при 18°, δ=0.885	темная смесь № 69 при 18° δ=0.897	темная смесь № 89—91 при 18° δ=0.896	нефт. ост. № 90 при 18°.4 δ=0.905	машин. светл. № 71 — 75 при 18.3° δ=0.905	валж. черн. № 70 при 18.7° δ=0.906	валж. черн. № 74 — 94 при 18.5° δ=0.900	черное масло № 93 при 18° δ=0.918	смесь черн. масла с ва-зел. № 99 при 18° δ=0.922
	0.00823	—	0.02075	0.02250	0.02260	0.03776	0.10940	0.41200
0.00237	712	0.00825	1680	1845	1892	3034	8360	28500
211	620	710	1418	1525	1602	2512	6820	19500
187	543	617	1215	1280	1362	2112	5600	14100
167	478	539	1045	1084	1169	1794	4590	11000
152	422	473	901	923	1008	1530	3800	8930
137	375	417	780	790	873	1310	3210	7330
124	334	370	679	680	762	1126	2754	6070
113	298	329	595	588	668	972	2394	5060
102	267	294	525	510	589	844	2070	4240
93	240	264	476	445	523	736	1800	3580
85	217	238	415	392	463	646	1566	3040
78	197			350	414	570	1364	2610
69	180			314	372	504	1180	2250
62	165			282	335	448	1010	1950
56	152			253	302	—	—	1680

Влияние величины μ на силу трения F и на коэффициент трения f оказалось, напротив, весьма существенным.

Величины μ сильно изменяются при изменении температуры жидкости. Разнообразие величин μ и их зависимости от температуры для некоторых органических и минеральных жидкостей представляет табл. 1.

Еще более наглядное знакомство с этими величинами доставляет приложенная в конце графическая таблица. На ней по оси абсцисс откладываются температуры (в °С), а по оси ординат — величины μ, выраженные в миллиграммах, приходящиеся на квадратный сантиметр, при скорости в 1 мм/сек. Каждая из проведенных в таблице кривых соответствует особой жидкости, название которой приведено в самой таблице. Эти кривые могут быть названы характеристическими кривыми.

Форма кривых, соответствующих маслам органического происхождения несколько отличается от формы кривых для минеральных жидкостей, а форма кривых минеральных жидкостей, лучше сказать нефтяных, зависит еще от происхождения нефти. Понижение температуры увеличивает μ у всех жидкостей, но у органических масел это увеличение идет не столь быстро, как у жидкостей из бакинской нефти, а у жидкостей из бакинской нефти не столь быстро, как у жидкостей из американской пенсильванской нефти (см. табл. 9 в тексте).

В каждой из этих трех групп кривых относительное положение кривых находится в некоторой зависимости от плотности соответствующих жидкостей. Вообще говоря, чем плотность жидкости больше, тем выше лежит ее характеристическая кривая; но это замечание остается справедливым только для жидкостей с очень различными плотностями. Если же плотности немного различаются, то по величинам их совсем нельзя судить об относительном расположении характеристических кривых. Так, кривые сурепного и оливкового масла, находясь между кривыми спермацетного и касторового масла, сами располагаются в обратном порядке. Три минеральных масла,

доставленные мне профессором Марковниковым, были таковы, что два из них, № 80 и 88, происходящие из балаханской нефти, при одинаковой плотности имеют чрезвычайно далеко друг от друга лежащие характеристические кривые; а третье масло, № 85, из бибейбатской нефти обладает плотностью гораздо бо̀льшей, чем два только что упомянутых; соответствующая ему характеристическая кривая лежит между кривыми масел № 80 и 88 едва-едва выше нижней кривой, соответствующей маслу № 85. Величины плотностей и внутренних трений всех этих трех масел представляет

Таблица 2

Масла / плотности δ при 17°C / Температура, °C	№ 80 0.915	№ 85 0.990	№ 88 0.915
	величины μ		
20	0.05460	0.01255	0.00735
25	3640	900	540
30	2550	662	400
35	1810	494	300
40	1320	383	238
45	980	303	190
50	740	243	157
55	580	191	128

Степень прозрачности или непрозрачности масел и температуры вспышки и воспламенения минеральных жидкостей еще менее, чем их плотности, способны указывать относительное расположение характеристических линий.

Жидкости, получаемые от смешения различных жидкостей, имеющих при одинаковых температурах неодинаковые величины μ, и, следовательно имеющие разные характеристические кривые, имеют внутреннее трение некоторое среднее между внутренними трениями составных их частей.

Прибавление к жидкости с большим внутренним трением, как, например, какому-нибудь густому вагонному маслу, небольшого количества солярного масла, пиронафта или керосина — жидкостей с малым внутренним трением, доставляет смесь, у которой внутреннее трение довольно значительно меньше внутреннего трения густого масла, вошедшего в ту же смесь.

Составление таких смесей может быть весьма полезно во всех тех случаях, когда примешанная легко подвижная жидкость не имеет причин путем испарения удаляться от составленной смеси. Определение количества составных частей, определенного величиною внутреннего трения, может быть сделано только путем попыток; но попытки эти не особенно затруднительны и при небольшом навыке не требуют много времени.

Величина $\varepsilon+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda_1}$ зависит от свойств смазывающей жидкости, от свойств трущихся твердых тел, от состояния их поверхностей трения, от скорости v и от давления p; но зависимость этой величины от свойств смазывающей жидкости и от скорости настолько незначительна, что при сравнении сил трения, развивающихся при смазывании маслами — сурепным, оливковым, спермацетовым или каким-нибудь из употребляемых минеральных — и при условии, что машина останется та же самая и что внешние силы, действующие на нее, не переменятся, можно принимать сумму $\varepsilon+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda_1}$ величиною постоянною, не опасаясь сделать таким образом ошибку более 25% даже в самых крайних случаях.

Со степенью точности еще большею можно считать, что при изменениях давлений p величина произведения $\left(\varepsilon+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda_1}\right)\sqrt{p}$ остается неизменною.

Изменения температуры не одинаково расширяющихся подшипника и цапфы могут так изменить кривизну трущихся

поверхностей этих тел, что изменения средней толщины ε смазывающего слоя будут величины весьма заметные и притом будут тем больше, чем больше угол, на котором цапфа обхватывается поверхностью трения подшипника.

Если коэффициент расширения подшипника, как обыкновенно бывает, будет больше, чем цапфы, то для подшипников, хорошо притертых к их цапфам при некоторой определенной температуре, повышение температуры увеличит среднюю величину ε, а понижение их температуры уменьшит ε. Если значительное уменьшение температуры подшипника и оси произойдет очень быстро и если угол обхвата подшипником оси близок к двум прямым, то края подшипника могут быть сильно прижаты к цапфе; напротив, значительное и быстрое повышение температуры подшипника и цапфы может довольно значительно увеличить расстояние между поверхностями трения цапфы и краев подшипника.

Первое из этих изменений вида поверхности увеличивает силу и коэффициент трения, а второе уменьшает; и то и другое изменение силы или коэффициента трения может быть весьма велико.

Притирание изобильно смазываемых подшипников гораздо быстрее и лучше производится густыми минеральными маслами, чем жидкими и чем сурепным маслом.

Притирание подшипников из белого металла, надлежащим образом сплавленного, содержащего 90% олова, 7% антимония и 3% красной меди, достигается гораздо легче, скорее и лучше, чем притирание подшипников бронзовых.[1]

Неодинаковое сопротивление в разных частях поверхностей трущихся твердых тел, вытирание их и происходящее от того беспрерывное изменение вида трущихся поверхностей

[1] Верность этого наблюдения подтверждается теперь и довольно большими уже практическими наблюдениями Николаевской и С.-П. Варшавской ж. д., как то мне любезно сообщили главные инженеры этих дорог Н. К. Гофман и В. С. Сумароков.

имеет всегда своим последствием, что при обстоятельствах, повидимому совершенно одинаковых, средняя толщина ε получает неодинаковые измерения, а вместе с тем меняются и коэффициент и сила трения. Различия этих последних величин, зависящие от указанного обстоятельства, становятся тем более ощутительными, чем тоньше слой и, следовательно, чем больше давление на квадратную единицу поверхности трения. Под давлениями, доходящими до 60 атм., отступления нечасто достигают $\pm 10\%$, но в некоторых исключительных случаях доходят до $\pm 20\%$ и более.

В случаях еще более исключительных, когда является непосредственное прикосновение поверхностей твердых тел, может обнаруживаться еще более существенное влияние на величину силы трения. Так как происходящее при этом изменение силы трения зависит от величины непосредственно прикасающихся частей поверхностей трения и в особенности зависит от величины той доли давления, которая будет приходиться на поверхности, вступившие в непосредственное прикосновение, то подобные изменения силы трения не только нельзя заранее определить, но нельзя и предвидеть. Поэтому при выборе металлов для подшипников и цапф надо обращать самое большое внимание на способность их стираться однообразно. Возможность существования в осях или в подшипниках особенно твердых мест есть несомненный признак их дурного качества, и при существовании таких цапф или подшипников невозможно будет избежать сильных нагреваний при сколько-нибудь значительных давлениях и скоростях, какое бы масло ни было взято для смазывания.

Чем большему давлению подвергается жидкий слой, тем меньше становится и его толщина, а потому тем больше делаются относительные скорости как внутри слоя, так и на поверхностях прикосновения с твердыми телами. Силы трения, пропорциональные этим относительным скоростям, возрастают, а потому, чем большему давлению подвергается жидкий слой,

тем легче могут появляться места непосредственного прикосновения металлов. Прямое заключение отсюда то, чтобы по возможности уменьшать давление на жидкий слой. Не следует однако итти в этом направлении слишком далеко, потому что уменьшение давления увеличивает коэффициент трения, как то указывает уравнение (2). Неумеренное желание избежать хотя и слишком большого, но нечасто появляющегося трения вызовет постоянное действие такого трения, которое могло бы быть менее вредно.

Для определения наивыгоднейшего давления теперь нельзя еще дать никакого определенного правила. Только внимательное наблюдение употребляемых в данной отрасли техники машин может указать разумному технику, какое давление может он допускать в данных для него условиях, зависящих как от свойств трущихся твердых тел, так и от надзора за состоянием их поверхностей и, наконец, от того, что будет важнее — сбережение ли работы двигателя, постоянно поглощаемой трением, или устранение хотя бы и резких, но сильных нагреваний.

Влияние скорости на силу и коэффициент трения зависит от теплопроводности тел, подвергающихся трению. При очень больших теплопроводностях (подобных той, какая была у прибора Гирна, охлаждавшегося или подогревавшегося достаточным количеством воды) в машине, двигающейся с разными скоростями, но постоянно при одной и той же температуре окружающих тел, если температура трущихся тел не может заметно отличаться от температуры тел окружающих, то силы трения изменяются почти пропорционально скоростям. В машинах с малыми теплопроводностями, в которых, несмотря на постоянство температуры окружающей среды, температуры трущихся частей непременно меняются вместе с изменениями количества теплоты, развиваемой трением, всякое изменение скорости влечет за собою изменение температуры трущихся частей, а потому и изменение внутреннего трения: увеличение скорости увеличивает температуру слоя и уменьшает его

внутреннее трение; напротив, уменьшение скорости понижает температуру и увеличивает внутреннее трение в слое.

Скорость движения и величина внутреннего трения одинаково входят множителями в числителях формул, выражающих силу и коэффициент трения, следовательно эти два элемента, при изменении скорости, противоположно влияют на величину силы или коэффициента трения. При различных теплопроводностях степень влияния каждого из этих элементов будет различна, но, чем меньше будет теплопроводность, тем больше влияния будет иметь внутреннее трение.

При той теплопроводности, которую имеют вагонные буксы и оси, оказывается, что произведение μv растет при увеличении v, но растет совсем не так быстро, как v, как то показывает следующая таблица:

Таблица 3

При v= 402	408	410	502	502	520	852	900	900	925
μv=1173	907	914	1130	1114	1066	1323	1323	1502	1341
Среднее	994		1105			1375			

Увеличение скорости в то же время увеличивает и величину суммы $\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}$, стоящей знаменателем формул, выражающих силу и коэффициент трения. Увеличение этой суммы немного меньше, чем произведения μv, поэтому-то коэффициент трения f изменяется при изменениях скорости так незначительно, что до сих пор многие считали его как бы вовсе не зависящим от скорости. В этом именно и заключается причина, почему Кирхвегер и Бекельберг, несмотря на очень большие изменения скорости цапфы, должны были притти к заключению, что коэффициент трения на вагонных осях не зависит от скорости.

При достаточно изобильном смазывании, подобном тому, какое оказывается в вагонных буксах, можно считать, что при

скоростях от 500 до 1000 мм/сек для стальных или железных осей, смазываемых сурепным или минеральным маслом, при бронзовых подшипниках:

$$\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda_1}=0.0010,$$

при подшипниках из вышеупомянутого белого металла:

$$\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda_1}=0.0018.$$

Величина ε и для давлений p_1, заключающихся в пределах от $p_1 = 0.1$ атм. до $p_1 = 75$ атм., удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon\sqrt{p_1}=0.0120.$$

При этом единицами меры скоростей и поверхностей трения должны быть миллиметры, единица времени — секунда, p должно быть выражено в атмосферах. При баббитовых подшипниках, вследствие большей величины суммы $\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda_1}$, чем при подшипниках бронзовых, трение становится менее; опыты с маслами — сурепным, разными минеральными (светлым машинным, одним густым и одним весьма жидким, черными вагонными) — и с нефтяными остатками показали, что коэффициент трения при баббитовых подшипниках f составляет почти 0.8 от коэффициента трения f_1 при бронзовых подшипниках, т. е. $f = 0.8\,f_1$.

Все изменения силы и температуры трения в данной машине, которые должны происходить от изменения скорости, давления на единицу поверхности, величины трущейся поверхности, внешней температуры, теплопроводности машины и от замены этой смазывающей жидкости другой, можно определить крайне простым графическим способом, если только примем, что в формулах (1) и (2) сумма $\varepsilon+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda_1}$ есть величина постоянная.

Сущность способа состоит в том, чтобы на чертеже с двумя взаимно перпендикулярными прямыми, принимаемыми за оси температур t и внутренних трений μ, начертить характеристические линии сравниваемых масел, представляющие зависимость величин μ от температур t для каждого из масел, подобно тому как показано на фиг. 1, где кривая *aa* относится к одному

Фиг. 1

маслу (спермацетовому), кривая *bb* — к другому (оливковому) и кривая *cc* — к третьему (сурепному). Затем на основании опытов с интересующей машиной, ходящей в некоторых определенных условиях с постоянной скоростью и при некоторой постоянной внешней температуре t_0, при смазывании маслом, например *bb*, определить температуру t_1 трущихся твердых тел в маслах, непосредственно прилегающих к смазывающему слою, но определить тогда, когда эта температура t_1 перестанет изменяться и в течение довольно долгого времени (10—15 мин.) будет оставаться постоянной или будет колебаться то в ту, то в другую сторону около некоторой постоянной величины.

Потом обе эти температуры t_0 и t_1 отметить на чертеже, на оси температур. Из точки t_1 восставить перпендикуляр до встречи с кривой масла bb, которым была смазана машина во время опыта (в фиг. 1 эта точка отмечена буквой n_1), и провести прямую $t_0 n_1$. Эта прямая и координаты точек пересечения ее с характеристическими линиями других масел и дают прямо указания, нужные для сравнения результатов трения, соответствующих разным случаям. Тангенс угла $n_1 t_0 t_1$, обозначенного на фиг. 1 буквой α, при теплопроводности машины Δ, механическом эквиваленте теплоты E определяется[1] из уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu_1}{t_1 - t_0} = \frac{E\Delta\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\sqrt{P}}{v^2\sqrt{p}\cdot\sqrt{Q}}. \tag{3}$$

[1] Вывод этого уравнения крайне прост. Если температура смазывающего слоя t_1 не переменяется при постоянной внешней температуре t_0, то, следовательно, количество теплоты, развиваемой трением, равно количеству теплоты, отдаваемой окружающей атмосфере. Работа, развиваемая силой трения при равномерной скорости вращения на окружности цапф v, выразится произведением Fv, а количество теплоты, соответствующее этой работе, как известно, есть $\frac{Fv}{E}$. Количество тепла, отдаваемого нагревающимися телами, при теплопроводности Δ выразится произведением $\Delta\,(t_1 - t_0)$; следовательно, $\frac{Fv}{E} = \Delta\,(t_1 - t_0)$; а заменяя здесь силу F равным ей выражением, найдем уравнение

$$\frac{\mu_1}{t_1 - t_0} = \frac{E\Delta\left(\varepsilon - \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)}{v^2 Q}.$$

Если числителя и знаменателя последней дроби умножим на $\sqrt{p}$ и заметим, что $\sqrt{p} = \sqrt{\frac{P}{Q}}$, то найдем

$$\frac{\mu_1}{t_1 - t_0} = \frac{E\Delta\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\sqrt{p}}{v^2\sqrt{p_1}\sqrt{Q_1}}.$$

Следует помнить, что стоящее в числителе произведение $\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\sqrt{p}$ можно считать величиной постоянной.

Если жидкость, смазывающая машину, не изменяется, а изменяется одна или несколько величин, входящих в последнюю часть равенства, т. е. скорость v, полное давление p, поверхность Q, теплопроводность Δ, то новое значение второй части равенства, соответствующее v_1, P_1, Q_1 и Δ_1, можно будет тотчас же вычислить,

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\mu_1'}{t_1' - t_0} = \frac{E\Delta_1\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\sqrt{P}}{v_1^2\sqrt{p_1}\sqrt{Q_1}},$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}\,\frac{v^2\sqrt{P}\cdot\sqrt{Q}}{v_1^2\sqrt{P_1}\cdot\sqrt{Q_1}}\cdot\operatorname{tg}\alpha, \tag{4}$$

и по уравнению (4) можно будет узнать, во сколько раз новый тангенс будет меньше или больше того, который был определен опытом.

Если через точку t_0 проведем прямую под новым углом $a_1 = m_1 t_0 t_1''$, соответствующим новому тангенсу, соответствующую новым условиям температуру трущихся частей около смазывающего слоя назовем t_1'' и соответствующее внутреннее трение назовем μ_1'', то можно будет написать новое уравнение

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\mu_1''}{t_1'' - t_0'}.$$

Это уравнение вместе с уравнением кривой bb определяет обе неизвестные μ_1'' и t_1''. На чертеже это определение выходит крайне просто: стоит провести через точку t_0 прямую под углом α_1 и отметить точку пересечения ее с кривой bb; на фиг. 1 точка обозначена m_1. Абсцисса точки m_1 и есть искомая температура t_1'', а ордината $m_1 t''$ есть μ_1''.

Подставляя величину μ_1' вместо μ в уравнения (1) и (2), получим величины силы и коэффициента трения, соответствующие новым данным величинам v, P_μ и Q.

Если все величины, входящие во вторую часть равенства, останутся без перемены, а изменится только внешняя температура, которая сделается t_0', на место бывшей t_0, то соответствующие этому изменению температура t_1' трущихся тел подле смазывающего слоя и величина μ_1 определятся из уравнения

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu_1'}{t_1' - t_0'} = \frac{E\Delta\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\sqrt{P}}{v^2\sqrt{P}\sqrt{Q}},$$

взятого вместе с уравнением кривой bb.

Для определения обеих величин, т. е. t_1' и μ_1', на чертеже достаточно отметить, на оси абсцисс, точку, соответствующую температуре t_0', и через эту точку провести прямую линию под углом α, т. е. параллельно линии t_0n_1. Пересечение такой прямой с кривою bb доставит некоторую точку, обозначенную на фиг. 1 буквой k_1. Абсцисса этой точки ot_1' определит температуру, которая разовьется при разбираемых условиях в смазывающем слое и в частях твердых тел, лежащих в непосредственной близости с этим слоем, а ордината k_1t_1' представит величину μ_1'.

Если угол α не меняется потому, что величины v, P, Q и Δ сохраняют свои величины, а внешняя температура меняется одна, то полученные оттого изменения силы трения F' и коэффициент f' будут относиться к первоначальным F и f точно так же, как $t_1'k_1'$ к t_1n_1

$$F' : F = f' : f = t_1'k_1 : t_1n_1.$$

Правильность этого уравнения весьма хорошо доказывается приводимой здесь табл. 4, в которой показаны отношения коэффициентов трения f и f', соответствующих одинаковым давлениям и скоростям, но различным внешним температурам. В таблице под буквой n_1 поставлены отношения, определенные прямым наблюдением, а под буквой n — отношения, определенные графически.

Отношение ординат $t'_1 k_1 : t_1 n_1$ зависит и от разности внешних температур t'_0 и t_0, и от абсолютных величин этих температур, и от вида кривой, характеризующей масло, зависящего, в свою очередь, от свойств самого масла, а потому, конечно, нельзя ждать точного определения величин отношения $t'_1 k_1 : t_1 n_1$ или $\frac{t_1 n_1 - t'_1 k_1}{t_1 n_1}$, в зависимости от одной разности $t'_0 - t_0$.

Опыт, однако, показывает, как видно из таблицы 4, что эта последняя разность настолько важнее всех других обстоятельств, что, зная только ее, можно уже довольно близко предсказать величину $\frac{F - F'}{F}$ или $\frac{f - f'}{f}$. Оказывается, что для сурепного масла и для всех употребляемых теперь минеральных масел бакинской нефти, от самых жидких до самых густых, в пределах обыкновенных внешних температур (от $-11°$ до $+26°$ C), при обыкновенных скоростях, понижение внешней температуры на 5° C увеличит силу трения приблизительно на $^1/_8$ ее часть, понижение внешней температуры на 10° C увеличит силу трения почти на $^1/_3$; понижение на 15° увеличит на $^1/_2$ и понижение внешней температуры на 20° увеличит силу трения немного более чем в 2 раза.

В случае замены одной смазывающей жидкости другой можно ждать, что в числителе второй части уравнения (3) изменится величина $\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}$. Опыт показывает, однако, как будет

Таблица 4

№ таблицы	Название масла	Давление на смазыв. слой, атм.	Скорость, мм/сек	Внешняя температура, °С	Коэффициенты трения	Отношение коэффициентов: опытом n_1	Отношение коэффициентов: графически n	Отношение коэффициентов: $\frac{n_1 - n}{n}$	Разн. привед. внешн. температур, °С
1 С	Масло сурепное . .	62	411	15.5	0.0033	1	1		
		62	403	5.4	0.0045	1.36	1.41	0.03	10.1
2 С		63	406	16.5	0.0032	1	1		
		63	410	7.3	0.0047	1.47	1.38	—0.06	9.2
12 С		63	897	—1.0	0.0061	1	1		
		63	892	—9.5	0.0077	1.20	1.19	0.01	8.5
10 С		74	515	0.5	0.0045	1	1		
		74	510	—6.9	0.0051	1.13	1.14	—0.01	7.4
11 С		75	515	0.5	0.0056	1	1		
		75	515	—6.9	0.0070	1.25	1.15	0.09	7.4
20 С		90	387	11.9	0.0036	1	1		
		90	421	3.9	0.0043	1.19	1.21	—0.02	8.0
2 С	Темная минеральная смесь № 67	63	403	16.0	0.0040	1	1		
		63	418	11.8	0.0047	1.17	1.19	—0.02	4.2
10 С	Смесь № 76	74	515	2.3	0.0045	1	1		
		74	519	—10.6	0.0066	1.47	1.67	—0.12	12.9
12 С	Смесь № 77	63	901	4.1	0.0059	1	1		
		63	901	—6.7	0.0085	1.45	1.62	—0.10	10.8
10 С		74	519	1.0	0.0055	1	1		
		74	510	—6.0	0.0071	1.30	1.23	0.02	7.0
11 С		75	519	0.7	0.0067	1	1		
		75	510	—6.0	0.0075	1.12	1.27	—0.12	6.0
20 С	Смесь № 95	90	421	15.1	0.0035	1	1		
		90	417	7.7	0.0041	1.18	1.37	—0.14	7.4
6 С	Светлое минеральное масло № 71 . . .	16.5	404	9.8	0.0105	1	1		
		16.5	411	5.0	0.0127	1.21	1.31	—0.08	4.8
19 С	Светлое мин. масло № 75	62	406	13.1	0.0062	1	1		
		62	417	5.0	0.0071	1.15	1.37	—0.16	8.1

Продолжение табл. 4

№ таблицы	Название масла	Давление на смазыв. слой, атм.	Скорость, мм/сек	Внешняя температура, °C	Коэффициенты трения	Отношение коэффициентов: опытом n_1	графически n	$\frac{n_1 - n}{n}$	Разн. привед. внешн. температур, °C
20 C		90	416	13.4	0.0045	1	1		
		90	417	5.1	0.0056	1.24	1.39	—0.11	8.3
3 C	Темное минеральное масло № 70	62	480	5.4	0.0060	1	1		
		62	504	—3.8	0.0070	1.27	1.34	—0.05	9.2
5 C	Темное минеральное масло № 70	62	848	9.9	0.0047	1	1		
		62	874	3.9	0.0053	1.13	1.20	—0.06	6.0
4 C		63	480	5.7	0.0084	1	1		
		63	504	—4.0	0.0110	1.31	1.32	—0.01	9.7
12 C	Темное минеральное масло № 72	63	901	2.7	0.0082	1	1		
		63	904	—6.0	0.0102	1.24	1.32	—0.06	8.7
24 C	Темное минеральное масло № 74	43	919	18.2	0.0061	1	1		
		43	916	10.4	0.0075	1.23	1.21	0.02	7.8
22 C		64	412	23.2	0.0046	1	1		
		64	410	15.5	0.0057	1.24	1.38	—0.10	7.7
25 C		62	920	25.8	0.0058	1	1		
		62	913	10.6	0.0086	1.48	1.54	—0.04	15.2
19 C		62	410	23.3	0.0046	1	1		
		62	408	3.4	0.0100	2.18	2.28	—0.05	19.9
21 C		62	920	26.0	0.0056	1	1		
		62	888	16.0	0.0070	1.25	1.36	—0.08	10.0
15 C		62	915	8.6	0.0069	1	1		
		62	924	—1.4	0.0085	1.25	1.42	—0.12	10.0
14 C		63	888	3.8	0.0046	1	1		
		63	884	—3.7	0.0056	1.22	1.33	—0.08	7.5
16 C		63	915	8.2	0.0054	1	1		
		63	924	—1.5	0.0070	1.30	1.24	0.05	9.7
20 C		90	424	13.3	0 0052	1	1		
		90	408	4.0	0.0067	1.29	1.47	—0.12	9.1

Окончание табл. 4

№ таблицы	Название масла	Давление на смазыв слой, атм.	Скорость, мм/сек	Внешняя температура, °C	Коэффициенты трения	Отношение коэффициентов: опытом n_1	графически n	$\frac{n_1 - n}{n}$	Разн. привед. внешн. температур, °C
20 C		90	410	23.4	0.0043	1	1		
		90	414	10.0	0.0074	1.72	1.71	0.00	13.4
20 C	Темное минеральное масло № 93 . . .	90	415	21.8	0.0057	1	1		
		90	409	12.1	0.0086	1.51	1.46	0.03	9.7
17 C	Нефтяные остатки № 90	62	504	9.8	0.0056	1	1		
		62	510	2.3	0.0076	1.35	1.31	0.03	7.5
15 C		62	910	9.3	0.0051	1	1	—	—
		62	910	3.0	0.0066	1.29	1.21	0.06	6.3
81 C		63	504	9.6	0.0052	1	1	—	—
		63	510	2.2	0.0062	1.19	1.26	—0.05	7.4
16 C		63	910	9.1	0.0047	1	1	—	—
		63	910	3.0	0.0056	1.20	1.20	0.00	6.1

видно из табл. 5, что эти изменения весьма незначительны, что, ограничиваясь небольшой степенью приближения, можно считать $\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}$ величиной постоянной, не зависящей от свойств смазывающей жидкости.

В таком случае замена смазывающей жидкости совсем не изменяет последнюю часть равенства (3), но член $\frac{\mu_1}{t_1 - t_0}$ заменится другим, в котором μ и t должны будут относиться к новой взятой для смазывания жидкости.

Если взамен жидкости, характеризующейся кривой *bb*, будем брать масла, которым соответствуют кривые *aa*, и если

внутренние трения и температуры, соответствующие первому маслу, обозначим μ_a, t_a, а соответствующие второму, обозначим μ_c, t_c, то при употреблении этих масел уравнение (3) примет вид для масла *aa*:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu_a}{t_a - t_0} = \frac{E\Delta\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\sqrt{P}}{\rho_2\sqrt{p}\sqrt{Q}}$$

и для масла *cc*:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu_c}{t_c - t_0} = \frac{E\Delta\left(\varepsilon - \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\sqrt{P}}{\rho^2\sqrt{p}\sqrt{Q}}.$$

Сличая эти уравнения с уравнением (3), тотчас же обнаруживаем, что при смазывании маслами *aa* или *cc*, взамен *bb*, должны развиваться такие температуры t_a, t_c на место t, которые определятся на фиг. 1, когда абсциссу точки пересечения прямой линии t_0n_1 с кривой *bb* заменим абсциссами точек пересечения той же прямой с кривыми *aa* и *cc*; ординаты этих последних точек представят соответствующие величины μ_a и μ_c. Два последних уравнения вместе с (3) показывают, что

$$\frac{\mu_a}{t_a - t_0} = \frac{\mu_c}{t_c - t_0} = \frac{\mu_1}{t_1 - t_0},$$

а из фиг. 1 видно, что

$$\frac{n_2t_2}{t_0t_2} = \frac{n_3t_3}{t_0t_3} = \frac{n_1t_1}{t_0t_1},$$

$$n_2t_2 = \mu_a, \qquad n_3t_3 = \mu_c, \qquad t_0t_2 = t_2 - t_0, \qquad t_0t_3 = t_3 - t_0.$$

Следовательно, если есть кривые *aa*, *bb*, *cc* и опытом найдены величины t_1 и μ_1, то при посредстве фиг. 1 тотчас же определяются величины μ_a, μ_c, t_a и t_c.

Силы и коэффициент трения, соответствующие маслам *aa*, *bb*, *cc*, при неизменности величин ρ, Q и p, на основании урав-

нений (1) и (2) будут относиться таким образом: $F_a : E : F_c = \mu_a : \mu : \mu_c = f_a : f : f_c$, а так как

$$\mu_a : \mu_1 : \mu_c = n_2 t_2 : n_1 t_1 : n_3 t_3,$$

то

$$F_a : F : F_c = f_a : f : f_c = n_3 t_2 : n_1 t_1 : n_3 t_3.$$

Эта пропорция указывает, что определение температуры жидкого слоя при смазывании машины каким-нибудь маслом при известной величине внешней температуры, доставляющей возможность тотчас же построить прямую линию, соответствующую прямой $t_0 n_1$, проведенной на чертеже, дает крайне простое и легкое средство для сравнения сил и коэффициентов трения, соответствующих другим маслам.

Насколько в самом деле результаты такого построения согласуются с результатами прямых наблюдений, видно из табл. 5.

Это построение прямо показывает, что, чем выше лежит на чертеже кривая внутреннего трения, другими словами, чем гуще масло, тем больше будет и сила трения при смазывании машин. В то же время видно, что силы трения, соответствующие маслам с различными кривыми внутренних трений, различаются между собой менее, чем внутренние трения или вязкости этих масел, соответствующие одной и той же температуре.

Только что описанный способ сравнения сил трения или их коэффициентов служит в то же время мерилом смазывающих способностей сравниваемых масел. Им можно пользоваться лишь с той степенью точности, какая допускается предположением, что сумма $\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}$ не зависит от свойства масла. На самом деле, это не всегда достаточно точно. Сравнивая таким образом наиболее жидкое из известных мне минеральных масел,

Таблица 5

№ табл. с подробност.	Название масла	Сумма давл. на подшипн., кг	Скорость средняя, мм	Атмосферы	Температура наблюденная	Температура вычисленная	$t - t_0$	$t' - t_0$	$\frac{t - t_0}{t' - t_0}$
1A	Спермацетовое	500	800	20.2	33.0	32.0	12.8	11.8	1.08
2A	Оливковое	500	1018	20.2	46.2	44.7	26.0	24.5	1.06
3A		500	1061	19.0	41.6	45.2	22.6	26.2	0.87
4A	Сурепное	1000	998	20.0	50.5	51.2	30.5	31.2	0.98
5A	Черное минеральное. Давидова, обр. № 36	1600	554	19.8	39.0	43.2	19.2	23.4	0.82
6A		2000	560	22.0	45.1	46.1	23.1	24.1	0.96
7A		1600	548	19.8	42.4	43.2	22.6	23.4	0.97
8A		2000	551	19.7	43.0	44.3	23.3	24.6	0.95
9A		1000	1021	16.5	57.8	54.8	41.3	38.3	1.08
10A		1000	1010	18.5	55.3	55.0	36.8	36.5	1.01
11A		1000	373	18.6	32.4	36.1	13.8	17.5	0.79
12A		1000	952	18.6	58.3	53.5	39.7	34.9	1.13
13A	Черное минеральное, Давидова, обр. № 36	1000	401	20.7	33.2	36.5	12.5	15.8	0.79
14A		1000	403	20.5	32.1	36.5	11.6	16.0	0.73
15A	Черное минеральное, Бакинского нефтян. товарищ., обр. № 41	1000	391	15.3	31.9	35.6	16.6	20.3	0.82
16A		1000	1071	16.3	55.2	62.5	38.9	46.2	0.84
17A	Светлое минеральное, Ропса № 1, обр. № 40	1000	396	17.7	32.2	32.8	15.5	15.1	1.03
18A		2000	543	18.0	43.8	42.4	25.8	24.4	1.05
19A		1000	1073	16.0	53.9	54.6	37.9	38.0	1.00
20A	Оливковое	1000	1078	14.7	48.8	48.8	34.1	34.1	1.00
21A	Сурепное	500	280	13.5	20.4	19.5	6.9	6.0	1.15
22A		500	387	14.4	23.4	23.7	9.0	9.3	0.97
23A		500	535	13.5	27.2	28.2	13.7	14.7	0.93
24A		1600	1084	15.1	55.7	55.2	40.6	40.1	1.01
25A		1600	1094	16.8	58.7	56.0	41.9	39.2	1.07
26A		1000	781	14.4	42.3	40.8	27.9	26.4	1.05

Окончание табл. 5

№ табл. с подробност.	Название масла	Сумма давл. на подшипн., кг	Скорость средняя, мм	Атмосферы	Температура		$t - t_0$	$t' - t_0$	$\frac{t - t_0}{t' - t_0}$
					наблюденная	вычисленная			
27A	Светлое минеральное Ропса, обр. № 40 . .	1000	548	18.6	36.3	34.8	17.7	16.2	1.09
28A		1600	1088	16.6	53.0	58.5	36.4	41.9	0.87
29A	Сурепное	1000	1061	15.5	45.7	50.6	30.2	35.1	0.86
34A	Черное минеральное, Давидова, обр. № 36	2000	285	18.7	33.4	32.0	15.7	14.3	1.10
35A		2000	564	18.5	43.8	44.2	25.3	25.7	0.98
36A		2000	1075	17.8	61.0	60.3	43.2	42.5	1.01
30A	Сурепное	1000	1018	15.1	48.6	49.0	33.5	33.9	0.99
31A		1000	772	15.6	37.7	40.8	22.1	25.2	0.88
32A		500	543	15.8	29.4	29.6	13.6	13.8	0.99
33A	Черное минеральное, Давидова, обр. № 36	1600	1069	15.5	57.1	59.3	41.6	43.8	0.95

так называемый олеонид Рагозина,[1] с сурепным маслом как с жидкостью весьма известной и весьма постоянной, найдем, что сила трения при олеониде будет меньше, чем при сурепном масле, в отношении почти 0.38 : 1, а прямой опыт указывает, что это соотношение есть почти 0.5 : 1. Принимая первое соотношение на место второго, делаем ошибку почти в 30%.

Сравнивая тем же графическим способом силу трения машины при употреблении смеси № 99 одного из самых густых минеральных масел с вазелином,[1] с силой трения той же машины при смазывании ее сурепным маслом, найдем, что первая больше второй почти в 3.8 раза, а прямое сравнение путем опыта доставляет только около 2.75; первое число больше второго

[1] См. табл. 1.

почти на 28%. В других, не столь крайних случаях отступления не так велики, но они во всяком случае есть. Для минеральных масел, превосходящих известную степень густоты, графический способ предсказывает слишком большие силы трения, представляет их относительную смазывающую способность ниже действительной, уклоняясь от истины тем больше, чем масло гуще. Для минеральных масел, имеющих густоту ниже некоторого предела, графический способ доставляет ошибки прямо противоположного только что сказанному свойства. Он определяет силы трения ниже действительных, представляя смазывающую способность выше той, какой на самом деле обладают эти масла. Ошибки этого рода можно значительно уменьшить, по крайней мере для всех сортов минеральных масел, полученных из бакинской нефти, начиная от олеонида до вышеупомянутой чрезвычайно густой смеси № 99.

Если n выразит графически найденное отношение силы трения при смазывании минеральным маслом и при смазывании сурепным маслом, то второе, гораздо более близкое к истине отношение n_1 определяется уравнением

$$n_1 = \frac{1441 + 69500\,\mu_{20}}{976 + 100\,000\,\mu_{20}} \cdot n, \qquad (4')$$

где μ_{20} выражает внутреннее трение сравниваемого масла при 20° С, выраженное в миллиграммах и приходящееся на площадь в 1 мм^2 при скорости в 1 мм/сек. Число n едва ли будет заключать ошибку и в 5%.

Этот же самый способ исправления оказался применимым и к маслу неизвестного заграничного происхождения, содержащему каменноугольное масло.

Разнообразие смазывающих способностей масел и степень правильности предложенного здесь способа сравнения представляет табл. 6, составленная на основании опытов с вагонною осью.

Таблица 6

Название масла	μ при 20°С	n	n_1, определенное		Ошибки определения $\frac{n_1-n}{n}$ в %
			из опыта	по ур. (4)	
Масло сурепное	0.00937	100	100	—	—
Французское масло	721	91	102	104	—2
№ 69	712	89	103	102	+1
№ 76	802	100	116	112	+4
Темные минеральные смеси					
№ 89 и 91	825	95	106	106	0
№ 70	839	105	112	116	—4
№ 67	1090	106	114	113	+1
Нефтяные остатки № 90	1680	139	137	137	0
Светлые минеральные					
№ 73	1710	130	131	127	+3
№ 71 и 75	1845	148	137	143	+5
№ 70	1895	164	144	157	—9
Темные минеральные масла					
№ 72	2630	156	144	141	+2
№ 74	3034	183	167	162	+3
№ 93	8360	300	233	233	0
Смесь темных минеральных с вазелином	2.8500	377	277	272	+2

Табл. 6 указывает, что только для одного масла из 15 отступление достигает 9%, откуда вытекает наиболее вероятное заключение, что определенная опытом величина n_1, относящаяся к этому частному случаю, заключает какую-нибудь незамеченную ошибку и что, следовательно, графическое сравнение смазывающих способностей минеральных масел с маслом сурепным, соединенное с уравнением (4), представляет весьма большую степень точности.

Весьма удовлетворительное определение второго приближения к величине, указывающей смазывающую способность, доставляемое уравнением (4), подтверждается и опытами с другой машиной, при давлениях на квадратную единицу значительно меньших, чем было при опытах с вагонной осью, как то доказывает

Таблица 7

Название масла	μ при 20° С	n	n_1, определенное		$\frac{n_1-n}{n}$ в %
			из опыта	по ур. (4)	
Сурепное масло	0.00937	100	—	—	—
Олеонид Рагозина № 68	237	38	47	50	—6
Темная минеральная смесь					
№ 69	712	83	89	94	—5
№ 60	837	90	96	100	—4
№ 67	1090	103	110	110	0
Светлое минеральное масло № 63	1527	121	118	116	+2
Темное » » № 62	2765	162	154	146	+6

Числа n и n_1, относящиеся к одним и тем же жидкостям, но находящиеся одни в табл. 6, а другие в табл. 7, несколько различаются. Это произошло не столько оттого, что они получены из опытов с различными машинами, сколько оттого, что величина отношения n, или смазывающей способности того или другого масла, по сравнению с сурепным не может быть постоянной, так как характеристические кривые минеральных масел, пересекаясь с кривой сурепного масла при некоторой температуре, удаляются от этой последней кривой тем более, чем более отличается температура от той, которая соответствует точке пересечения. При температурах более низких кривые минеральных масел поднимаются значительно выше кривой сурепного масла, а при температурах более высоких они опу-

скаются ниже кривой сурепного масла. Поэтому-то отношение n зависит от величины t_0 и от угла α (фиг. 1).

Для правильного сравнения смазывающих способностей в каком-нибудь частном случае, надо знать хотя бы приблизительно величины t_0 и α.

Приведенные в таблицах 6 и 7 числа n и n_1 суть средние из таких отношений, которые часто встречаются в обыкновенных обстоятельствах техники; эти таблицы заслуживают внимания в двух различных отношениях, они прежде всего служат для практических целей сравнения относительного достоинства смазывающих жидкостей, и применение их в этом смысле будет ниже указано в подробности. С другой стороны, эти таблицы чрезвычайно важны потому, что, относясь к самым разнообразным минеральным жидкостям, из которых одни содержат весьма значительные количества смолистых веществ, а другие их почти не содержат, одни содержат довольно большие примеси углеводородов весьма легких, а другие этих примесей не содержат почти совсем, и тем не менее, несмотря на все это разнообразие, смазывающая способность жидкостей определяется в этих таблицах на основании одного только свойства жидкостей — их внутреннего трения. Следовательно, в отношении смазывающей способности жидкости внутреннее трение есть ее главнейшее свойство (фиг. 2).

Изменение толщины слоя, отчего бы оно ни произошло, изменит силу трения F и коэффициент ее f потому, что в уравнениях (1) и (2) переменятся и знаменатели и величины μ в их числителях. Если бы при данных величинах Δ, v, P, Q величина ε была такова, что при внешней температуре t_0 температура внутри слоя была t_1 и величина внутреннего трения выражалась бы на фиг. 1 ординатой $t_1\ n_1$, то при уменьшении средней толщины до величины ε_1, до такой величины, что

$$\left(\varepsilon_1+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda_1}\right):\left(\varepsilon+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda_1}\right)=t_1g:t_1n_1,$$

на место $\operatorname{tg}\alpha$, определенного уравнением (3), получили бы

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{g t_1}{n_1 t_1} \operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu''}{t'' - t_0}. \tag{5}$$

Температура t''_1 и величина внутреннего трения μ''_1, соответствующие этому изменению, найдутся графически, когда возьмем координаты точки пересечения линии bb, характеризующей масло, с прямой $t_0 m_1$. Очевидно, что

$$\mu_1' = \mu \frac{t_1'' m_1}{t_1 n_1}. \tag{6}$$

Вставляя в уравнения (1) и (2) новые величины ε_1 и μ''_1, μ_1, или величины им равные, из уравнений (5) и (6) найдем, что

$$F_1 = \frac{\mu \cdot \rho \cdot Q}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)} \cdot \frac{t_1'' m_1}{t_1 n_1} \cdot \frac{t_1 n_1}{t_1 g} = F \cdot \frac{t_1'' m_1}{t_1 g},$$

$$f_1 = \frac{\mu \rho}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right) \sqrt{p}} \cdot \frac{t_1 m}{n_1 t_1} \cdot \frac{t_1 n_1}{t_1 g} = f \frac{t_1'' m_1}{t_1 g}.$$

Из этого построения видно, что увеличение средней толщины смазывающего слоя влечет за собой уменьшение температуры слоя смазывающей жидкости и увеличение ее внутреннего трения; но, несмотря на это последнее увеличение, сила трения и коэффициент уменьшаются. Уменьшение силы трения, однако, не столь значительно, как увеличение суммы $\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}$.

Очевидно, что уменьшение толщины слоя повысит его температуру и увеличит силу трения. Это обстоятельство вполне объясняет, почему при неоднообразном стирании подшипника или цапфы, при уменьшении средней толщины слоя оси начинают греться и даже гореть.

Хотя описанные результаты изыскания могут быть по справедливости названы любопытными и иногда для техников важными, но несравненно важнее то, что этот способ указывает чрезвычайно важное влияние внутреннего трения жидкости на трение в машине и что при его посредстве есть возможность легко и скоро указать, какое влияние на трение в машине произведет изменение внутреннего трения жидкости, предназначенной для смазывания. Он убеждает техников, что если два масла органических или два масла минеральных будут иметь одинаковые кривые внутренних трений, то и трение в машине, соответствующее тому и другому маслу органическому или тому и другому маслу минеральному будет одинаково, разумеется, предполагая, что в обоих случаях обстоятельства, при которых двигаются трущиеся части машины, остаются без изменений.

Следовательно, если каким бы то ни было способом было найдено масло, удовлетворяющее данным потребностям, то техники, изготовляющие, и техники, потребляющие масла, определяя внутреннее трение, легко могут проверять: действительно ли новое масло может так же смазывать, как прежнее, или нет? Если нет, то тотчас же обнаруживается, в какую сторону и насколько отступает его смазывающая способность и насколько изменятся силы и температуры трения.

Отсюда следует, что определение внутреннего трения при разных температурах, нужное для очертания кривой внутреннего трения, должно быть поставлено среди других наблюдений, характеризующих смазывающую жидкость, производимых на заводах, приготовляющих масло, и производимых приемщиками потребителей.

Хотя произведенные опыты, указав зависимость трения машины от внутреннего и отчасти от внешнего трения, вовсе не показали зависимости от плотности, температур вспышки или воспламенения и даже степени просвечивания или прозрачности масел, но тем не менее вовсе нельзя отвергать пользы

и даже необходимости наблюдения этих свойств смазывающей жидкости, в особенности температур вспышки и воспламенения и степени очистки от смолистых веществ, находящихся в масле.

Не только мои опыты с маслами показали, что незначительные примеси легких углеводородов способны сильно изменять внутреннее трение получающейся смеси, а вместе с тем и трение в машине, смазываемой этой смесью, но и опыты Густава Дольфуса давно показали то же самое.

Дольфус заметил[1], что примесь к оливковому маслу эфира в количестве 25% уменьшает трение машины, смазываемой этой смесью, на 21—23%, но уменьшение трения наблюдается недолго, около 10 мин., затем трение снова возрастает, и остающаяся разница составляет всего 7.9%, которая уже и остается.

Это показывает, что примесь летучих веществ способна уменьшать трение и может быть полезна; но примешивание может быть допущено лишь в такой мере, чтобы примешанная жидкость, несмотря на свою летучесть, могла оставаться в смеси очень продолжительное время.

В каждом минеральном масле можно уменьшить его внутреннее трение, примешивая к маслу более жидкие углеводороды, так называемые солярные масла, пиронафт или даже керосин; эта примесь может быть вполне допустима и полезна, если она ограничивается такими количествами, которые не улетучиваются из смеси, несмотря на продолжительное влияние тех обстоятельств, которые в обыкновенных случаях действуют в машинах на смазывающую ее жидкость. Смеси, быстро изменяющие свой состав для смазывания машин, не только не пригодны, но даже вредны и не должны быть допускаемы.

Так как практически применимое средство распознавания большей или меньшей примеси летучих углеводородов состоит в определении температур вспышки и воспламенения жидкости,

---

[1] Bulletin de Mullhous, t. XXVI, 1854, p. 163.

то отказываться от наблюдения этих признаков было бы неразумно.

Связь между температурами вспышки и воспламенения и способностью жидкости не изменять своего состава при тех или других условиях еще совершенно не исследована, поэтому величины температур вспышки и воспламенения, допустимых для того или другого случая практической техники, могут быть определены только путем попыток, мало-помалу совершенствуя существующие правила.

Присутствие смолистых веществ в минеральных маслах увеличивает их внутреннее трение и увеличивает трение в машинах, смазанных такими маслами. Слишком большое количество смолистых веществ может даже портить металлические поверхности. Такая вредная примесь, конечно, не может быть допустима далее известной границы. Она может быть открыта наблюдением над внутренним трением жидкости; но это наблюдение будет недостаточно, если только влияние смолистых веществ будет уменьшено прибавкой к маслу какого-нибудь летучего углеводорода. Избыток летучих веществ, правда, определяется температурами вспышки и воспламенения, но так как эти последние определения не отличаются точностью, то весьма полезно определять количество смолистых веществ в данном масле прямым определением. В отношении этих примесей, точно так же как и в отношении примесей летучих, теперь нельзя еще предложить ничего другого, как придерживаться существующих требований, совершенствуя их постепенно.

Масла с одинаковыми характеристическими кривыми внутреннего трения, при одинаковых температурах вспышек и воспламенения и с одинаковыми количествами примешанных смолистых веществ можно считать одинакового достоинства для смазывания машин; масла, не удовлятворяющие хотя бы одному из этих требований, будут иметь не одинаковые смазывающие способности если и не тотчас после составления смеси, то иногда впоследствии. Кривые внутренних трений, соответствующих

Этим маслам, или, лучше сказать, данному состоянию каждого из этих масел, дают возможность по вышеприведенным правилам определить смазывающие способности для каждого данного случая.

Наибольшее давление, приходящееся на квадратную единицу поверхности трения, при котором смазывающие жидкости не вытесняются из промежутка, образуемого трущимися поверхностями цапфы и подшипника, нельзя еще определить теоретически. Оно не было определено и опытным путем. Еще менее можно ожидать, что какие бы то ни было опыты, производимые с какой-нибудь специальной машиной, дадут указания, какие наибольшие давления могут быть допущены для данной жидкости в данной отрасли техники. Этот путь не может привести к цели, потому что опыты могут указать только соответствие между давлениями и *средними* толщинами слоя жидкости данных физических свойств, а на практике всегда будут отступления от правильной формы трущихся поверхностей. На этих поверхностях всегда будут являться более или менее значительные выступы, высота которых не должна превосходить толщину слоя во всех тех случаях, когда непосредственное прикосновение твердых тел грозит сильным нагреванием трущихся частей. Трудность и даже невозможность правильного решения вопроса о наибольшем допустимом давлении на квадратную единицу поверхности представится еще яснее, когда заметим, что толщина слоя зависит не только от давления, приходящегося на квадратную единицу, но и от скорости и от свойств смазывающей жидкости, а именно: толщина слоя при одном и том же давлении становится тем меньше, чем ниже лежит характеристическая кривая. Верность этого последнего замечания, по крайней мере для минеральных масел, ясно указывается таблицами 6 и 7. В практических применениях обусловливающее некоторым образом толщину слоя внутреннее трение смазывающей жидкости должно быть в соответствии с тем давлением, которому подвергается смазывающий слой, и с той возможностью, какая

существует для поддержания правильного вида трущихся поверхностей; и как бы ни были желательны употребление смазывающих жидкостей с наименьшим внутренним трением и возможно большее уменьшение поверхностей трения, но такие уменьшения не могут итти далее известных пределов, обусловливаемых практической возможностью поддерживать надлежащее соответствие поверхностей трения при данном давлении.

Что может быть практически достигаемо, без особых затруднений, на это могут дать ответ только большие практические наблюдения. Надежные указания этого рода представляет теперь только одна отрасль техники — только железнодорожная практика. Так, на многих австрийских и венгерских железных дорогах смазывающий слой подвергается давлению, доходящему до 80 атм., а для смазывания употребляется масло, так называемое вулкан. Образец этого масла, доставленный мне из Вены, имел при разных температурах внутренние трения, указанные в следующей таблице.

Таблица 8

Величина внутреннего трения масла вулкан (Vulcan oel)
Плотность масла при 21° C. $\delta = 0.9178$

$t° = 20$	25	30	35	40	45	50	55
$\mu = 0.00870$	0.00648	0.00497	0.00390	0.00310	0.00251	0.00208	0.00175

Из этой таблицы обнаруживается, что масло вулкан мало отличается от испытанной мной смеси № 89, 91 и 95 (табл. 1).

В Америке на железных дорогах употребляется нефтяное масло, известное под названием West-Virginia. Образец этого масла был мне доставлен из Бостона (штат Массачузетс) и по испытании его найдены внутренние трения, приведенные в следующей таблице 9.

Таблица 9

Величины внутреннего трения американского масла, называемого West-Virginia, при 18° С. $\delta = 0.8843$

$t^\circ = 20$	25	30	35	40	45	50	55	60
$\mu = 0.01200$	0.00860	0.00660	0.00518	0.00405	0.00325	0.00265	0.00225	0.00185

Сравнение этой таблицы с табл. 1 показывает, что внутренние трения масла West-Virginia мало отличаются от черной минеральной смеси № 67. Оба эти примера весьма важны для наших железных дорог, указывая, что вагонные оси при обыкновенном надзоре за ними могут быть смазываемы маслами, подобными маслам, обозначенным в табл. 1 под № 67 и даже № 95, с довольно малым внутренним трением, а если это возможно в таких странах, как Венгрия и в особенности Америка, где температура атмосферы бывает выше, чем у нас, то тем более возможно употребление и у нас минеральных масел с такими же внутренними трениями. Но теперь мы имеем и свой пример. С.-Петербурго-Варшавская дорога, применившая жидкие смеси для смазывания своих пассажирских и товарных вагонов с сентября 1885 г., в течение более 16 месяцев употребляла смеси, сходные со смесями № 67, 89, 91 и 95 и 60—77. Количество смазывающей жидкости, употребленное С.-Петербурго-Варшавской дорогой, превосходит 9000 пудов, а число ненормально нагревшихся букс было точно так же невелико при употреблении жидких смесей, допускавших несколько меньшую толщину слоя, как было и в предшествующие годы при употреблении более густых масел, способных поддерживать более значительную толщину слоя. В то же время надо сказать, что число ненормально нагретых букс на С.-Петербурго-Варшавской дороге было значительно в несколько десятков раз) менее, чем на большинстве наших дорог, принимая в расчет пробег вагонов, приходящийся на один случай нагревания буксы, и употреблявших масла, гораздо более густые, чем вышеуказанные смеси.

Выбор наиболее выгодной смазывающей жидкости

Наиболее безошибочные способы определения свойств масел и самые верные предсказания относительно влияния масла на величину сил трения в данной машине, при замене одного масла другим, еще недостаточны для правильного в экономическом отношении выбора масла.

Выбор масла будет правилен в экономическом отношении только тогда, когда расход на смазывание и на топливо или вообще работу двигателя будет доведен до возможно малой величины. Эта наиболее важная цель выбора, к которой стремились все наблюдатели, требует еще достаточно верного определения той доли работы, которую двигатель расходует вследствие трения смазанных частей машин при каком-нибудь известном масле, и того расхода смазывающей жидкости, который при этом встречается. До сих пор эти последние вопросы крайне мало изучались, и такими сведениями техника теперь еще крайне бедна. Сколько-нибудь удовлетворительные указания относятся только к поездам железных дорог и к бумагопрядильням. Поэтому и примерные расчеты для экономического выбора масла можно привести только для какой-нибудь железной дороги или для какой-нибудь бумагопрядильни. И те расчеты, которые сюда будут относиться, еще нельзя основать на данных, вполне хорошо определенных и потому всеми равно принимаемых. Самые эти данные должны быть подвергнуты возможно строгому критическому разбору.

а) Железные дороги

Относительно трения на вагонных осях есть множество указаний, но эти указания до крайности противоречивы.

Геттингенские опыты Бокельберга,[1] произведенные при

[1] Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, 1864, S. 12.

средних нагрузках в 5000 и 7500 фунт., или в 2.5 и 3.75 т на цапфу, при давлениях на смазывающий слой от 22 до 54 атм., при бронзовых подшипниках дают коэффициенты трения, заключающиеся в пределах от 0.00288 до 0.00901; средняя величина коэффициента трения, определенная из 960 наблюдений, есть 0.0057.

Ганноверские опыты Кирхвегера[1] для нагрузок и давлений на смазывающий слой почти такой же величины, как и у Бокельберга, дают коэффициенты трения от 0.00850 до 0.01860, в среднем из 8 опытов 0.0141.

Опыты, сделанные мною в условиях, близких с двумя только что упомянутыми опытами, при внешней температуре $+4°$ C дают величину коэффициента трения для бронзовых подшипников от 0.0040 до 0.0062, в среднем из 14 опытов 0.0053, т. е. число, очень мало отличающееся от найденного из опытов Бокельберга, но почти в три раза менее числа, указанного Кирхвегером.

Вильмен, Гебгард и Диедонне,[2] выделяя помощью некоторых рассуждений силу трения на осях вагонов из полной силы сопротивления тех же вагонов, полагают, что коэффициент трения при малых скоростях, при смазывании маслом надо считать равным 0.0180 и при смазывании салом 0.0320; а при скоростях обыкновенных, не превышающих 20 верст в час, надо принимать в вагонах, смазанных маслом, 0.0230, в вагонах, смазанных салом, 0.0340, в буксах же паровозов, смазанных салом, 0.0530.

Инженеры железной дороги левого берега Рейна[3], поступая подобно Вильмену, Гебгарду и Диедонне, полагают, что в вагоне весом 11 т, в котором нагрузка всех четырех цапф

[1] Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, 1864, S. 12.

[2] De la resistance des trains et de la puissance des machines, p. 36, 37.

[3] Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, 1885, H. II u. III, S. 41.

составляет всего 9 т, сила сопротивления, зависящая от трения на цапфах, равна 19 кг. При диаметре цапф 80 мм и колес 1000 мм коэффициент трения, соответствующий данным обстоятельствам, определяется из уравнения

$$19 = 0.08 \cdot 9000 f,$$

откуда $f = 0.0260$.

Наконец, американский инженер Веллингтон[1] на основании опытов над трением цапф говорит, что при смазывании маслом West-Virginia в порожних вагонах сопротивление на тонну в 2000 фунт. составляет от 5 до 6 фунт., а в груженых — от 3.5 до 4 фунт., другими словами, что величину коэффициента трения надо считать:

в порожних вагонах от 0.0300 до 0.0370

и в груженых вагонах от 0.0220 до 0.0250.

Останавливаясь на этих числах и не говоря даже о частных значениях их, а обращаясь только к средним выводам, видим что величины найденных коэффициентов трения для вагонных осей, смазанных маслом, заключаются в пределах от 0.0053 до 0.0260 в груженых вагонах, а в порожних и до 0.0370. Число 0.0053 меньше числа 0.0960 почти в 5 раз и меньше 0.0370 почти в 7 раз.

Притом меньшие величины коэффициента трения, как 0.0053, 0.0057, 0.0140, найдены путем наблюдений над осями в особых станках или приборах, а бо́льшие числа, как 0.0180, 0.0230, 0.0250 и 0.0260, определены наблюдениями, сделанными над поездами. Эти последние числа, указываемые Вильменом, Гебгардом и Диедонне, инженерами Рейнской дороги и Веллингтоном, относятся к вагонам, находящимся в движении, и потому заслуживают особого внимания инженеров; вдобавок все эти числа так мало между собой разнятся, что, повидимому, их нельзя так подозревать в неправильности. Тем не менее

[1] «Инженер» (Киевск.), 1885, № 9, стр. 388.

следует сказать, что едва ли эти числа заслуживают какого нибудь доверия. Все эти числа определены не прямым наблюдением силы трения, развивающейся на цапфах вагонов, а вычислены в предположении, что при незначительных скоростях движения вагонов полная сила сопротивления их состоит только из двух частей: из сопротивления вагонных колес перекатыванию и из трения на осях; что можно пренебрегать не только сопротивлением воздуха и теми сопротивлениями, которые зависят от неровности пути, но что и трение между ободьями колес и рельсами, способное развиваться при неправильном положении колес на рельсах, можно считать как бы равным нулю. Насколько неправильны эти предположения, видно уже из того, что при коэффициенте трения на цапфах, равном 0.0250, и при отношении диаметра цапф к диаметру колес, равном 0.08, сопротивление вагона весом в 10 т с нагрузкой на оси в 8 т, зависящее от одного трения на цапфах и приходящееся на тонну полного веса вагона, было бы $w = \frac{8}{10} 0.025 \times \times 0.08 \times 1000 = 1.6$ кг, а многие опыты с вагонами и поездами указывают, что и полное сопротивление вагона, заключающее в себе не только силу трения на цапфах, но и все другие силы сопротивления, немного отличается от 1.6 кг/т.

Так, опыты Вебера[1] с одним вагоном дают величины в пределах от 1.1 до 1.8 при средней величине 1.56 кг/т.

Опыты инженера Клауса[2] дают в среднем 1.55 кг.

Мое исследование опытов французских инженеров Вильмена, Гебгарда и Диедонне над одним вагоном,[3] доставило тоже $w = 1.56$.

Опыты, сделанные в 1860 г. на Лионской железной дороге[4]

[1] Handbuch für specielle Eisenbahn-Technik. Drit. Band, S. 56.

[2] Id.

[3] Мои записки для Технологического института 1877 года.

[4] Couche-Voie matériel rouland et exploitation téchnique de chemins de fer, t. III, p. 632 et suiv.

над поездами, состоящими из 10 вагонов, показали, что средняя величина полного сопротивления на тонну, при скорости 23 км/час может быть 1.47 кг/т.

Дедуи[1] на основании опытов, судя по описанию, довольно точных, показывает, что при диаметре цапф не 80, а 90 мм и при скоростях от 0.5 до 1 м/сек полное сопротивление на тонну веса вагона было от 1.5 до 1.7 кг. Если бы диаметры цапф были 80 мм, то взамен этих чисел получили бы от 1.36 до 1.5 кг. Во все эти величины сопротивлений входит сопротивление перекатыванию, которое, судя по опытам Вуда, надо считать в 1 кг/т, а по опытам Памбура, 0.32 кг/т. Вычитая даже 0.3 из всех только что приведенных величин, начиная с определений Вебера, увидим, что трение на осях вместе с трением колес на рельсах может оказываться во многих случаях значительно меньше, чем 1.6 кг/т.

Насколько трение колес об рельсы могло иметь влияние на величины только что приведенных сопротивлений, указывают опыты саксонские. Эти опыты указывают,[2] что в пассажирском вагоне с обыкновенной установкой осей при малых скоростях сопротивление составляет, как указали и прежде приведенные опыты, 1.6 кг/т; а в таком же вагоне и при тех же условиях движения, но с осями, свободно установляющимися на пути, сопротивление на тонну всего 1.1 кг. Разница в 0.5 кг/т могла произойти только от трения колес, которые при неизменности взаимного положения осей не имеют возможности правильно устанавливаться на рельсах.

Опыты над товарными вагонами привели даже к указанию, что сумма сопротивлений от перекатывания колес и от трения на цапфах составляет всего 1 кг/т. Крайне неудовлетворительные сведения о сопротивлении перекатыванию не дают

---

[1] *Desdouits.* Application de la méthode rationelle au études dynamométriques. 1885, p. 80, 81.

[2] Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens. 1885. Neue Folge, Bd. XXII, S. 202.

возможности еще выделить из полного сопротивления ту его часть, которая приходится на трение на осях. Если, однако, допустить, что это сопротивление (0.32) вместе с очень малым сопротивлением воздуха составляет 0.5 кг, то на трение придется всего 0.5 или 0.6 кг, т. е. почти в три раза менее величины, определенной в предположении, что коэффициент трения есть 0.0250; а это уже показывает, что коэффициент трения немного отличается от 0.0080.

Приведенные соображения, очевидно, не могут быть взяты для верного определения величины коэффициента трения и служат только для доказательства, что нет возможности считать величину этого коэффициента равной 0.0250, как предполагают многие авторитетные, практические инженеры. Против только что приведенных соображений можно сделать одно, повидимому весьма серьезное, замечание. Можно сказать, что отвергаемая величина коэффициента трения дана инженерами из наблюдений над поездами в том виде, в каком они ежедневно находятся, а все опыты, приведенные здесь для опровержения, были сделаны над вагонами и поездами, приготовленными для опытов, и что следовательно, может быть, что коэффициент трения, не превосходящий при благоприятных условиях величины 0.0080, достигает в обыкновенных условиях гораздо большей величины, именно величины 0.0250.

Это весьма правдоподобное замечание и есть причина, почему до сих пор инженеры держатся различных взглядов и почему ни та, ни другая партия инженеров не может привести неопровержимых доводов в пользу своего мнения. Нерешительное положение должно было необходимо оставаться до тех пор, пока не явилась возможность исчислять или определять силу трения на вагонных осях не в станках, а в вагонах, двигающихся в поезде, и притом делать это исчисление не путем крайне ошибочного исключения из полной силы сопротивления вагона всех сил, кроме трения на осях, сил, вообще крайне мало нам известных, а путем таких наблюдений, которые прямо

назначены для определения силы трения и не оставляют никаких сомнений в их правильности. Исчисления такого рода сделались теперь не только возможными, но и крайне легкими при посредстве предложенной мной гидродинамической теории трения и сделанных мною опытов.

Эти исчисления основываются на том, едва ли подлежащем сомнению предположении, что теплопроводность вагонных букс и осей не зависит от условий, при которых происходит движение этих частей, и что поэтому она имеет одну и ту же величину как в случае движения осей в специальных станках, предназначенных для производства опытов, так и в случае движения таких же осей в поездах по железным дорогам. Только в случаях сильного дождя или сильного снега, попадающих на буксы, теплопроводность во время движения в поезде может оказаться более.

Многочисленные опыты[1] показали, что для вагонных осей число единиц тепла Δ, передаваемое в атмосферу в течение одной секунды, зависит от разности температур подшипника, около смазывающего слоя, и t_0 — атмосферы. Зависимость может быть выражена уравнением

$$\Delta = 0.001255 + 0.000025\ (t - t_0).$$

Многие опыты показали, что под давлением в 3400 кг на цапфу, при скорости вращения, соответствующей скорости поезда в 38 верст в час, и при коэффициенте трения $f = 0.0053$ разность $t - t_0 = 20°$ C. Отступления от этого числа бывают в ту и другую сторону самые незначительные. Следовательно, цапфа, находящаяся в указанных условиях, вместе с буксой отдаст атмосфере число единиц тепла, равное

$$\Delta(t - t_0) = (0.001255 + 0.000025 \times 20)\ 20 = 0.035.$$

[1] *Н. Петров.* Описание и результаты опытов над трением жидкостей и машин. Изв. Технол. ин-та за 1885 г. или отдельное издание, стр. 396.

Если бы коэффициент трения был не 0.0053, а 0.0250, то число единиц тепла, которое надо было бы отдавать атмосфере при движении вагона, сделалось бы больше и стало бы

$$\frac{0.0250}{0.0053} \times 0.035 = 0.165.$$

Вставляя это число в предыдущее уравнение на место $\Delta(t - t_0)$, найдем, что

$$0.165 = [0.001255 + 0.000025\,(t - t_0)]\ (t - t_0),$$

откуда

$$t - t_0 = 59°.$$

Отсюда видно, что при температуре $t_0 = 15°$ C, температура подшипника $t = 74°$ C. Букса в таких случаях становится столь горячей, что ее нельзя безнаказанно трогать рукой; а между тем известно из ежедневной практики, что при температуре в атмосфере 15° цапфы, несущие груз в 3400 кг, при скоростях 38 верст в час и более остаются совсем холодными или едва заметно теплыми.

Подобный же расчет показывает, что не только нельзя ожидать, чтобы в обыкновенной практике встречался коэффициент трения 0.0250, но что нельзя ждать и величины его, равной 0.0140. Допуская эту величину, надо сказать, что при указанных условиях движения цапфы будет выделяться в каждую секунду $\frac{0.0140}{0.0053} \times 0.035 = 0.0944$ единиц теплоты и что температура подшипника t определится уравнением

$$0.0944 = [0.001255 + 0.000025\,(t - t_0)]\ (t - t_9),$$

откуда

$$t = t_0 + 41.$$

Ясно, что при $t_0 = 15$, найдем $t = 56$, величину тоже слишком большую и в обыденной практике никогда не замечаемую.

Правильность предположения, что коэффициент трения вагонных осей, смазываемых сурепным маслом, при обыкновенных нагрузках и при обыкновенных летних температурах воздуха имеет в среднем величину, близкую к 0.0050, не только при опытах, но и при обыкновенных условиях движения осей в поездах, очень хорошо подтверждает сличение произведенных мной опытов, приведенных в табл. 4 (13 C)[1] с опытами, описанными бельгийским инженером Бельрошем.

Бельрош, наблюдая температуру вагонных цапф, нашел,[2] что при смазывании сурепным маслом, при скоростях поезда, доходивших до 50 км/час, цапфа, поддерживавшая груз в 3750 кг, при температуре воздуха в 17°C нагревалась настолько, что среднее из многих наблюдений температуры оказалось 34.6° C.

В табл. 4 (13C) приведены результаты семи опытов, сделанных в разное время, при нагрузке цапфы $P=3420$ кг, при скоростях, близких к скорости вращения оси, соответствующей ходу поезда по 38 верст в час и при довольно различных температурах атмосферы. Все эти опыты, приведенные к одной и той же скорости $v=38$ верст и к одной и той же внешней температуре $t_0=-2°C$, доставили среднюю температуру подшипника $t=19.4°C$.

Принимая этот средний результат табл. 13C за основание и определив, как выше изложено, по правилам графического способа температуру t', которая должна соответствовать условиям опытов Бельроша, т. е. $t'_0=17°C$, $v=50$ км/час и полной нагрузке на цапфу $P=3750$ кг, найдем, пользуясь кривой внутреннего трения сурепного масла, что $t'=35.5°$ C.

Повышение температуры цапфы над температурой атмосферы оказались: по опыту Бельроша 17.6° C, а по указанному построению, сделанному на основании табл. 13C, 18.5° C. Разница между этими двумя определениями всего 5%. Так как средняя

---

[1] Описание и результаты над трением жидкостей и машин, стр. 98.

[2] *E. Belleroche.* De l'emploi des hydro-carbures comme lubrifiants dans le materiel des chemins de fer, p. 23.

величина коэффициента трения, указанная в табл. 13, столь хорошо согласующейся с опытами, сделанными в Бельгии, оказывается равной 0.0049, то можно сказать, что коэффициенты трения, близкие к 0.005, определенные опытами геттингенскими и моими, встречаются не только в опытах, но и в обыденных жизненных явлениях и что сколько-нибудь значительные отступления от этой величины будут составлять исключения.

Этот результат моих опытов, показавший, что действительная, наиболее часто встречающаяся величина коэффициента трения при смазывании бронзовых вагонных подшипников сурепным маслом, почти в три раза менее общепринимаемой величины, данной Кирхвегером, $f=0.014$, имеет право на серьезное внимание техников. Он существенным образом меняет наш взгляд на составные части полного сопротивления поезда. Принимая величину коэффициента трения равной 0.0140, оказывается, что из полного сопротивления вагона на трение осей приходится почти 1.1 кг/т при коэффициенте трения, равном 0.0053, часть, зависящая от трения, будет почти 0.4 кг/т.

На дорогах, где длинные и крутые подъемы и спуски составляют небольшую часть длины всего пути, как нередко бывает на наших русских дорогах, средняя величина полного сопротивления поезда из товарных вагонов немного отличается от 3.5 кг/т, следовательно, на основании прежнего взгляда на дело, надо было бы считать, что на трение осей в поезде приходится почти 30% всего сопротивления; а теперь оказывается, что при смазывании сурепным маслом на трение идет всего 11 или 12%.

Замена сурепного масла каким-нибудь другим, доставляющим коэффициент трения в полтора раза больше, вызывающая увеличение сопротивления поезда на 5 или на 6% и настолько же увеличивающая расход топлива, заставила бы, при прежних понятиях, думать, что сопротивление поезда и расход топлива возрастут на 15%. Очевидно, что сбережение на стоимости масла, способное даже с избытком вознаградить потерю 6% топлива, не всегда покроет потерю топлива, доходящую до 5%.

Следовательно, вполне выгодная на самом деле замена сурепного масла другим, более дешевым, может представляться невыгодной при неправильном понятии о величине сопротивления поезда, приходящейся на долю трения.

Чтобы показать способы правильного экономического выбора смазывающей жидкости для какой бы то ни было железной дороги, надо показать численные соотношения количественных расходов топлива и смазки независимо от свойств самой дороги.

Эти расчеты сделаем в предположениях:

а) что величину коэффициента трения, как было выше указано, можно считать почти не зависящей от скорости;

б) что средняя нагрузка вагонных цапф около 2500 кг и что среднее давление, которому подвергается смазывающий слой, немного отличается от 35 атм.;

в) что при внешней температуре 4° С и при давлении на смазывающий слой в 62 атм. коэффициент трения есть 0.0053;

г) что, следовательно, при средней годичной температуре 4° С и при давлении на смазывающий слой 35 атм. коэффициент трения будет $0.0053\sqrt{\frac{62}{35}}=0.007$;

д) что диаметры вагонных колес равны 1000 мм, а средний диаметр вагонных шеек 85 мм;

е) что нагрузка на шейки составляет 0.75 полного веса вагона с грузом.

При этих условиях сопротивление w_1 товарного вагона, зависящее от трения и приходящееся на одну тонну, будет $W_1=0.75 \times 0.007 \times 0.085 \times 1000=0.45$ кг и работа двигателя τ при передвижении вагонной оси на 1 версту, приходящаяся на тонну полного груза, соответствующего этой оси, будет

$$\tau=0.45 \times 1067=480 \text{ кг-м};$$

работа трения, соответствующая одной оси товарного вагона средней нагрузки

$$\tau_1=5 \times 480=2400 \text{ кг-м}.$$

Относительно тендерных и паровозных осей предположим:

ж) что теплопроводность частей, передающая теплоту от трущихся поверхностей к атмосфере, одинакова с теплопроводностью вагонных частей;

з) что давление, которому подвергается слой жидкости, смазывающей шейки, также 35 атм., как и в вагонах;

и) что средняя нагрузка тендерных шеек равна 2.750 кг,

к) что нагрузка, производящая трение на тендерных шейках, составляет 0.8 полного груза тендера;

л) что диаметры тендерных колес равны 1200 мм, а диаметры шеек 130 мм;

м) что средняя нагрузка паровозной шейки 5000 кг;

н) что полная нагрузка паровозных осей составляет 0.8 полного груза паровоза;

о) что диаметры колес товарных паровозов 1200 мм, а диаметры шеек 180 мм.

При таких условиях сопротивление тендера w_2, зависящее от трения осей, приходящееся на тонну среднего веса тендера, будет[1]

$$w_2 = 0.8 \times 0.007 \times \frac{130}{1200} \times 1000 = 0.61 \text{ кг}$$

[1] Приведенные здесь числа относительно тендера и паровоза весьма хорошо подтверждаются опытами Дедуи (Dedouits. Application de la méthode rationelle aux études dynamométriques), определившими сопротивление паровоза с тендером. Тендер, весом 16 т, имел шейки диаметром 130 мм и колеса 1120 мм; паровоз, весом 36 т, имел шейки диаметром 170 мм; диаметр колес 1510 мм. Поэтому сопротивление от трения тендерных осей на тонну было

$$w'_2 = 0.8 \times 0.007 \times \frac{130}{1120} \times 1000 = 0.65.$$

Сопротивление от трения паровозных колес, зависевшего от веса паровоза,

$$w'_3 = 0.8 \times 0.007 \times \frac{170}{1510} \times 1000 = 0.62.$$

и работа τ_2, расходуемая двигателем при проходе версты, приходящаяся на тонну веса тендера, будет

$$\tau_2 = 0.61 \times 1.067 = 650 \text{ кг-м.}$$

Работа трения, соответствующая одной тендерной оси,

$$T_2 = 0.007 \times \frac{130}{1200} \times 1000 \times 1.067 = 4.469$$

Средняя величина сопротивления от трения осей паровоза и тендера

$$w_3 = \frac{16}{52} \times 0.65 + \frac{36}{52} 0.62 = 0.63 \text{ кг.}$$

Чтобы получить полное сопротивление, приходящееся на тонну веса паровоза вместе с тендером, надо придать еще сопротивление перекатыванию не менее 0.32 кг/т и то трение колес, которое зависит от невозможности для осей свободно устанавливаться на рельсах.

В товарных вагонах с двумя только осями это последнее сопротивление было около 0.6 кг/т, следовательно, в паровозе с тендером надо ожидать не меньше, а скорее несколько больше. Таким образом, полное сопротивление паровоза, при очень малых скоростях, не зависящее от трения в машине и не зависящее от сопротивления воздуха, должно быть

$$0.63 + 0.32 + 0.60 = 1.55 \text{ кг.}$$

Прямые опыты (Dedouits, p. 78) доставили полное сопротивление, исключая трение машины, 2.20 кг. Разница оказывается 0.65. Это различие скорее всего должно быть приписано слишком малому значению, приписанному сопротивлению перекатыванию и сопротивлению от трения колес, зависящему от несвободности осей. Опыты того же Дедуи показали, что сопротивление 6-колесного паровоза как экипажа составляет 2.2 кг/т, а сопротивление 8-колесного паровоза, тоже как экипажа, составляет уже 3.1 кг/т. Оказывается, что прибавление к трем осям четвертой увеличивает сопротивление на тонну на 3.1—2.2 = 0.9 кг; следовательно, немудрено, что сопротивление 6-колесного паровоза от несвободности его осей превзойдет сопротивление 4-колесного вагона на 0.65 кг.

Во всяком случае, следует обратить внимание, что приведенное в тексте определение сопротивления паровоза от трения на осях скорее уменьшено, чем увеличено.

или круглым числом

$$T_2 = 4470 \text{ кг-м.}$$

В паровозах сопротивление w'_3 от трения на осях, зависящее от веса паровоза и приходящееся на тонну полного груза его, будет

$$w'_3 = 0.8 \times 0.007 \times \frac{180}{1200} \times 1000 = 0.84 \text{ кг,}$$

и работа τ'_3, расходуемая двигателем при проходе версты, приходящаяся на тонну веса паровоза, будет

$$\tau'_3 = 0.84 \times 1067 = 896$$

или круглым числом

$$\tau'_3 = 900 \text{ кг-м.}$$

Трение на шейках паровозных осей зависит не от одного веса паровоза, но еще и от давления пара на поршни, передающегося на шейки при посредстве шатунов, мотылей и сдваивающих дышел. Вместе с тем, как меняется давление пара на поршни, меняется и давление на шейки. Так как давление пара немного изменяет выше определенную величину трения, зависящую от груза паровоза, то, несмотря на то, что силы трения пропорциональны не самим давлениям, а их корням квадратным, можно для простоты расчетов вводить в вычисление среднюю величину давления пара на поршни. Надо сказать, что и средняя величина давления двигающего поршня не есть величина постоянная, а меняется вместе с изменением работы, производимой паровозом: при передвижении тяжелых поездов оно больше, чем при передвижении поездов легких; на подъемах больше, чем на горизонталях или спусках; при больших скоростях больше, чем при малых, разумеется, предполагая равенство всех прочих обстоятельств. Для совершенно правильного расчета надо было бы проследить все движение поезда, определить среднее давле-

ние для каждой особой совокупности обстоятельств и на основании таких данных вывести среднюю величину давления на поршень. Подобные расчеты можно делать только для того или другого участка дороги, принимая в расчет состояние пути, расписание хода поездов и вес перевозимых поездов. Но такие расчеты и сложны и не столь поучительны, как другие, более общие, если только они не очень много уклоняются от действительных явлений.

В товарных паровозах сцепление с рельсами только в крайних случаях доходит до 0.2 полного веса паровоза, а в огромном большинстве случаев составляет около 0.04 или 0.05 полного веса. Путь, проходимый поршнями, в 1.57 меньше пути, проходимого паровозом, а потому давление, производимое обоими поршнями на шейки осей, в редких случаях может доходить до $2 \times 1.57 \times 0.2 = 0.63$ веса паровоза, а в большинстве случаев будет около 0.13 или 0.16 веса паровоза.

Во все время движения паровоза в одном и том же направлении сила, равная силе сцепления паровоза с рельсами, действует на шейки в одном и том же направлении. Давление же, производимое на шейки поршнями, меняет свое направление при каждой перемене хода поршня. Эти две последние силы действуют то в одном и том же направлении, то в направлениях прямо противоположных. Во время наибольших напряжений силы паровоза, давление пара и сила сцепления, действующие или совершенно или почти перпендикулярно весу, доставляют силы от $0.63 + 0.20 = 0.83$ до $0.63 - 0.20 = 0.43$ полного веса паровоза, а в большинстве случаев от $0.13 + 0.04 = 0.17$ до $0.13 - 0.04 = 0.09$ полного веса или от $0.16 + 0.05 = 0.21$ до $0.16 - 0.05 = 0.11$ полного веса.

Равнодействующие вертикальных и горизонтальных давлений на цапфы в случаях крайних напряжений будут от 1.3 до 1.1 полного веса, а в обыкновенных случаях — от 1.02 до 1.01. Средняя величина равнодействующей силы давления на шейки в случае крайних напряжений будет почти 1.2 полного

веса паровоза, а в обыкновенных случаях будет 1.015 полного веса. Сила трения, возрастающая приблизительно пропорционально корню квадратному давления, в случае крайних напряжений будет не больше чем 1.1 силы трения, зависящей от одного груза, а в обыкновенных случаях работы сила трения на шейках будет больше силы трения, соответствующей только весу паровоза, не более чем в 1.01 раза.

Следовательно, сила трения на шейках осей, приходящаяся на тонну веса паровоза, в редких случаях будет

$$w_3 = 1.1 \times 0.84 = 0.92 \text{ кг},$$

а в обыкновенных случаях

$$w_3 = 1.01 \times 0.84 = 0.85 \text{ кг}.$$

Работа этой силы τ_3 при проходе паровозом одной версты будет в случаях сильных напряжений

$$\tau_3 = 0.92 \times 1067 = 980 \text{ кг-м},$$

в обыкновенных случаях

$$\tau_3 = 85 \times 1067 = 907 \text{ кг-м}.$$

Трение на цапфах ведущих и сдваивающих дышел также зависит от давлений пара. В редких случаях оно едва доходит до 0.63 полного веса паровоза, а в большинстве случаев около 0.13 или 0.16 веса паровоза.

Средний диаметр этих цапф можно считать равным половине диаметра паровозных осевых шеек.

Давление, которому подвергается жидкий слой на этих цапфах, в два или три раза больше давления, которому подвергается слой, смазывающий шейки. Это обстоятельство уменьшает коэффициент трения почти в полтора раза. Следовательно, сопротивление w_4 и работа этого сопротивления τ_4 при проходе паровозом версты, соответствующие трению на цапфах всех главных и сое-

динительных шатунов или дышел, будут меньше соответствующих величин w'_3 и τ'_3 потому, что давление на цапфы меньше давления на шейки, потому что коэффициенты трения на цапфах составляют 0.7 от коэффициентов трения на шейках, и потому что диаметры цапф почти 0.5 диаметра шеек. Таким образом, находим, что при наибольших напряжениях паровоза

$$w'_4 = 0.63 \times 0.7 \times 0.5 w'_3 = 0.22 \times 0.84 = 0.18 \text{ кг},$$
$$\tau'_4 = 0.22 \times 896 = 197 \text{ или почти } 200 \text{ кг-м}.$$

При обыкновенной, наиболее часто встречающейся, работе паровоза

$$w_4 = 0.16 \times 0.7 \times 0.5 w'_3 = 0.056 \times 0.84 = 0.05 \text{ кг},$$
$$\tau_4 = 0.056 \times 896 = 50 \text{ кг-м}.$$

Трение на параллелях до такой степени зависит от пыли, почти всегда покрывающей эти поверхности, что замена одной смазывающей жидкости другой едва ли может оказывать какое бы то ни было заметное влияние. Поэтому здесь нет повода рассматривать это трение.

Трение эксцентриков находится в очевидной зависимости от трения золотников. Эту последнюю силу нередко крайне преувеличивают. Сила, прижимающая золотники в паровозе, почти никогда не превосходит 0.3 веса самого паровоза, и как бы плохо ни смазывались золотники, нельзя ожидать, чтобы коэффициент трения был больше 0.1. Следовательно, полная сила, прижимающая эксцентриковые хомуты к эксцентрикам, зависящая от трения золотников, не превзойдет 0.03 веса паровоза; прибавляя еще трение в сальниках, вряд ли получится более 0.033 полного веса паровоза. Трущиеся поверхности эксцентриков имеют такие размеры, что при указанной величине полного давления давление на квадратный сантиметр поверхности смазывающего слоя будет около 1 атм. Это показывает, что коэффициент трения будет почти в шесть раз больше, чем на осях

паровозов. Диаметр эксцентриков в три раза больше диаметра осевых шеек. Следовательно, сопротивление w_5 паровоза на тонну, зависящее от трения на эксцентриках и τ_5— работы этого сопротивления, могут быть определены, принимая за основание величины w'_3 и τ'_3

$$w_5 = 0.033 \times 6 \times 3 \times w'_3 = 0.59 \times 0.84 = 0.5 \text{ кг},$$

$$\tau_5 = 0.59\,\tau'_3 = 0.59 \times 8.96 = 529, \text{ или круглым числом } 530 \text{ кг-м.}$$

Эти последние числа надо считать еще все-таки несколько преувеличенными.

Полное сопротивление паровоза на тонну его веса, зависящее от трения его частей при смазывании сурепным маслом при наибольшем напряжении его частей:

$$w' = w_3 + w'_4 + w_5 = 0.92 + 0.18 + 0.40 = 1.60 \text{ кг};$$

при обыкновенно встречающейся работе, которую надо иметь главным образом в виду для экономических расчетов:

$$w = w_3 + w_4 + w_5 = 0.85 + 0.05 + 0.50 = 1.4 \text{ кг.}$$

Полная работа сопротивления паровоза при пробеге одной версты (1.067 м), зависящая от трения его частей, смазываемых сурепным маслом и приходящаяся на тонну его веса при наибольшем напряжении паровоза:

$$T = \tau_3 + \tau'_4 + \tau_5 = 980 + 197 + 529 = 1.706 \text{ кг-м};$$

при обыкновенной работе паровоза:

$$l = \tau_3 + \tau_4 + \tau_5 = 907 + 50 + 529 = 1486 \text{ кг-м.}$$

Средняя нагрузка паровозной оси мало отличается от 10 тонн, поэтому работа, зависящая от трения частей паровоза, смазанных сурепным маслом, соответствующая одной паровозной оси, может быть принята равной при обыкновенных условиях

$$T_3 = 10 \times 1486 = \text{почти } 15\,000 \text{ кг-м.}$$

Сравнение величин T_1, T_2 и T_3 показывает, что

$$T_1=2400 \text{ кг-м}, \qquad T_2=1.86, \qquad T_3=6.25.$$

Имея эти указания, уже нетрудно определить работу, производимую паровозной машиной данного поезда при смазывании его сурепным маслом. Чтобы составить себе представление о ней, определим ее для поездов среднего состава с паровозом 6- и 8-колесным.

В поезде среднего состава при 6-колесном паровозе можно считать 50 вагонных осей и 3 тендерные, а в поезде с паровозом 8-колесным можно считать 70 вагонных осей и 3 тендерные оси.

В таком случае при пробеге одной версты паровозная машина вследствие трения смазанных частей поезда, исключая поршней, золотников и параллелей, произведет работу в 6-колесном паровозе:

$$T_6=(50+1.86\times3+6.25\times3)\ 2400=178\,392 \text{ кг-м},$$

а в 8-колесном паровозе:

$$T_8=(70+1.86\times3+6.26\times4)\ 2400=241\,391 \text{ кг-м}.$$

Отсюда нетрудно определить расход топлива.

В паровозных машинах, по указаниям многих опытов требуется 2 кг угля среднего качества на каждую индикаторную лошадиную силу в час времени. Это значит, что один килограмм угля производит работу в 135 000 кг-м.

Следовательно, при пробеге в 1000 верст выше приведенными поездами среднего состава, смазанными сурепным маслом, расход топлива, зависящий от трения смазанных частей, был бы

для 6-колесного паровоза:

$$Q_6=1321 \text{ кг, или почти 80 пуд.},$$

для 8-колесного паровоза:

$$Q_8 = 1788 \text{ кг, или почти } 109 \text{ пуд.}$$

Подобный расчет нетрудно сделать для какого угодно поезда, принимая в расчет его действительные условия движения.

Из обоих расчетов, относящихся к поездам среднего состава, видно, что расход топлива, происходящий от трения смазанных частей, составляет почти 1.6 пуда на 1000 вагонных осе-верст.

Зная расход топлива при смазывании сурепным маслом, определится и расход при употреблении какого-нибудь другого масла, как только будет найдена для этого масла смазывающая его способность относительно сурепного масла, т. е. выше описанная величина n_1.

Если бы, например, сурепное масло было заменено такими нефтяными остатками, для которых $n_1 = 137$, тогда как для сурепного масла $n_1 = 100$, то расход топлива на трение в поезде на каждые 1000 вагонных осе-верст будет $1.6 \times 1.36 = 2.19$ пуд., или на 0.59 пуд. угля более. Выгодна ли такая замена, или нет, нетрудно будет решить, сравнивая, насколько дешевле обойдется покупка нефтяных остатков на место сурепного масла и насколько дороже обойдется расход топлива.

Расход масла на смазывание вагонных осей и паровоза с тендером на многих дорогах составляет 1.75 фунта на 1000 вагонных осе-верст для поездов среднего состава.

Если пробег вагонных осей на данной линии составляет 1 000 000 верст, уголь обходится по 20 коп. пуд, масло сурепное 5 рубл. пуд и нефтяные остатки 80 коп. пуд, то замена сурепного масла нефтяными остатками на $0.59 \times 0.2 \times 1\,000 = 118$ руб.

Сбережение на смазывающем материале составит

$$\frac{1.75}{40} \times 1000 \times (5 - 0.8) \text{ руб.} = 183.75 \text{ руб.}$$

Отсюда видно, что замена сурепного масла нефтяными остатками выгодна даже и при весьма дорогом топливе. Она на каждый 1 000 000 вагонных осе-верст доставит сбережение в 65.75 руб.

Другой пример. Положим на той же линии сурепное масло было бы заменено машинным маслом такого качества, как № 71, приведенное в табл. 6, стоящее по 2 р. 20 к. за пуд. Для этого масла $n_1 = 1.43$.

Излишек расхода на топливе определяется в сумме

$$0.43 \times 1.6 \times 1000 \times 0.2 = 137.50 \text{ руб.}$$

Сбережение на смазывающей жидкости доставит сумму

$$\frac{1.75}{40} \times 1000 \times (5 - 2.2) = 122.5 \text{ руб.}$$

Отсюда ясно, что замена сурепного масла таким машинным маслом доставит на каждый 1 000 000 вагонных осе-верст убытка 15 руб.

Третий пример. При стоимости топлива 10 коп. за пуд предполагается заменить масло, одинаковое с № 74 (табл. 6), стоящее 1 р. 10 коп., другим минеральным маслом, одинакового достоинства с № 67 (табл. 6), стоящим 1 р. 20 коп. Смазывающая способность первого из этих масел $n_1 = 1.62$, а второго $n_1 = 1.13$.

Сбережение на расход топлива было бы:

$$(1.62 - 1.13) \times 1.6 \times 1000 \times 0.1 = 78.50 \text{ руб.}$$

Излишек расхода на топливе:

$$\frac{1.75}{40} \times 1000 \times (1.20 - 1.10) = 4.38 \text{ руб.}$$

Указанная замена принесет на каждый 1 000 000 вагонных осе-верст сбережение в 74.12 руб.

Четвертый пример. При стоимости топлива 8 коп. за пуд предполагается заменить масло, одинаковое с № 67, имеющим $n_1 = 1.13$, стоящее 1р . 20 коп. за пуд, нефтяными остатками $n_1 = 1.37$, стоящими 80 коп. за пуд.

При замене произойдет убыток в расходе топлива на сумму $(1.37-1.13)\times 1.6\times 1000\times 0.08 = 30.72$ руб.

Сбережение на смазочном материале

$$\frac{1.75}{40}\times 1000\times (1.20-0.80) = 17.50 \text{ руб.}$$

В результате получится убыток 13.22 руб.

Еще один любопытный пример. По статистическому отчету Министерства путей сообщения за 1883 год видно, что пассажирские и товарные паровозы с поездами сделали пробег в 108 млн. верст, а пробег осей всех пассажирских и товарных вагонов был за 5078 млн. верст. Следовательно, средний состав немного отличается от принятого среднего состава поезда для 6-колесного паровоза. Полный пробег паровозов и вагонов и теперь немного отличается от только что упомянутого.

Смазывающим материалом служат теперь на всех дорогах минеральные жидкости неопределенного свойства, но, судя по бывшим у меня образцам, эти жидкости доставляют силу трения больше чем сурепное масло приблизительно в 1.4 раза.

Если бы такие жидкости были заменены надлежащими смесями, то трение могло бы быть уменьшено на 40%, т. е. на каждый миллион верст расход уменьшился бы на $0.4\cdot 1600 = 640$ пуд. угля, а на полный пробег в 5078 млн. сбережение топлива достигло бы 3 250 000 пуд. угля или соответствующего ему топлива. Почти половина пробега совершается на дровах, и, следовательно, сбережение составило бы около 1 625 000 каменного угля и около 16 250 куб. саж. дров.

Средняя стоимость угля едва ли менее 15 коп. за пуд и средняя цена дров не менее 15 руб. за куб. сажень. Следовательно,

сбережение на нашей сети железных дорог в расходах топлива может достигать 487 000 руб.

Эти примеры достаточно разъясняют и способ экономического выбора смазывающего масла и значение этого выбора для железных дорог, а выбор такой возможен только с помощью кривых внутреннего трения, определенного надлежащим прибором при разных температурах.

б) Бумагопрядильни

Другая отрасль техники, где правильный, экономический выбор смазывающей жидкости можно делать теперь же без больших ошибок — это бумагопрядение. Бумагопрядильные мануфактуры приводятся в действие двигателями, развивающими очень большую работу, обыкновенно в несколько сот лошадиных сил.

Для выпрядания средних нумеров пряжи № 36 и 40 можно считать, что на каждые 125 веретен с их подготовительными машинами требуется одна лошадиная сила.

Следовательно, на мануфактуре с 50 000 веретен должна работать машина в 400 индикаторных сил. Работа такой машины в течение года продолжается 3450 час. Хорошие машины расходуют в час на индикаторную силу около 3.2 фунта угля среднего качества. Следовательно, годовой расход угля такой машиной будет 110 000 пуд.

Выбор масла может легко быть причиной увеличения этого расхода на 10 и даже 20% и, составляя 10 000 или 20 000 пуд. угля, при переводе на деньги может составлять не одну тысячу рублей в год.

К сожалению, надо сказать, что в литературе бумагопрядильного дела очень мало обращается внимания на влияние смазывающей жидкости на величину трения в машинах, входящих в состав бумагопрядильни.

Мне известны только опыты Дольфуса,[1] сделанные в широких размерах и заслуживающие полного внимания и доверия. Из этих опытов оказалось, что замена сурепного масла (Colzapele) маслом спермацетовым уменьшала работу паровой машины, приводившей в движение бумагопрядильню с 30 000 веретен, на 18% и более. В этой же статье указано, что для смазывания машин в нормальных условиях надо считать на каждые 1000 веретен ежедневно по 0.833 кг, или 2.03 русских фунта. Из той же статьи Дольфуса можно вывести, что работа, зависящая от трения частей, смазанных сурепным маслом в сельфакторах, при 6000 об/мин, на каждые 1000 веретен составляет 2.5 силы, а в машинах крутильных (сучильных) à retordre, при 3400 об/мин, на каждые 1000 веретен на трение приходится по 11 сил. В общем и среднем, принимая во внимание всякие станки и передаточные валы с приводами, при смазывании сурепным маслом, на каждые 1000 оборотов и на веретено приходится работа в 0.0013 лошадиной силы, а из этого числа на трение приходится 0.0005 силы.

При годовой работе в 3450 час. и при расходе двигателем по 3.2 фунта угля на силу в час придется на силу в год 275 пуд. угля. Это значит, что на каждые 1000 веретено-оборотов, совершающихся на мануфактуре в минуту, чему соответствует 0.0005 лошадиных сил в час, работа трения при употреблении сурепного масла будет поглощать в течение года 0.138 пуда угля.

Имея это число, достаточно умножить его на число веретен мануфактуры и на число совершаемых ими оборотов, чтобы найти вес топлива, расходуемого в год на трение. Когда это число будет найдено и будут известны смазывающая способность и цена масла, предназначенного для замены сурепного

[1] Notice sur differentes huiles employées au graissage des machines, et en particulier celle de spermaceti, par M. Gustave Dolfus. Bull. soc. Industr. de Mulhouse, t. XXVI, p. 159.

масла, тогда не трудно будет решить вопрос о выгоде предполагаемой замены. Той же самой цели несколько грубее, но зато значительно скорее и легче можно достигнуть следующим образом: можно считать, что на каждые 1000 веретен приходится работа в 7.67 силы и что 40% этой работы, или почти три силы, поглощаются трением, если на мануфактуре употребляется масло сурепное. Нужное для этой последней работы в течение целого года количество каменного угля среднего качества составит

$$3 \times \frac{3.13}{40} \times 3450 = 810 \text{ пуд.}$$

Итак, при употреблении сурепного масла бумагопрядильня расходует в год на каждые 1000 своих веретен только на работу трения по 810 пуд. угля среднего качества, или круглым числом по 800 пуд. В то же самое время на смазывание будет употреблено 14.6, или круглым числом 15 пуд. масла.

На некоторых из бумагопрядилен в Петербурге, взамен сурепного масла, употребляют для смазывания веретен минеральное масло, почти не отличающееся от № 67 (табл. 6), а для смазывания приводов — минеральное масло, почти не отличающееся от № 70 (табл. 6). Стоимость этих масел 2 р. 20 к. пуд.

Употребление этих масел неминуемо влечет за собою излишек трения, а потому и расход топлива более чем на 13%, следовательно, при стоимости угля в 15 коп. за пуд излишек расхода топлива на 1000 веретен будет $0.13 \times 800 \times 0.15 = 15$ р. 60 к.

Сбережение на стоимости масла при цене сурепного масла по 5 руб. за пуд на те же 1000 веретен составит:

$$15\,(5-2.20) = 42 \text{ руб.}$$

В заключение оказывается, что сбережение в расходах составит на 1000 веретен 26 р. 40 к. Следовательно, бумагопрядильня с 50 000 веретен сбережет 1320 руб. в год.

Если бы та же бумагопрядильня взяла на место сурепного масла олеонид такого же свойства, как олеонид Рагозина, чрезвычайно сходный с исследованным мною образцом минерального масла, употребляемого в Америке[1] для смазывания веретен, то, так как для олеонида Рагозина $n_1 = 50$, сбережение в расходах топлива на 1000 веретен составило бы

$$0.5 \times 800 \times 0.15 = 60 \text{ руб.}$$

При цене олеонида в 4 руб. за пуд сбережение в расходе на смазывающий материал составило бы

$$15 \times (5-4) = 15 \text{ руб.},$$

а полное сбережение на топливе и смазке могло бы достигнуть 75 руб. Бумагопрядильни с 50 000 веретен могли бы сберечь до 3750 руб. На фабриках подмосковных, где топливо значительно дороже, подобные замены будут оказывать еще большее значение.

[1] Американское веретенное масло, имеющее при 24.6° С плотность 0.8872, имеет при температурах t внутренние трения μ:

при $t° = 20$	25	30	35	40	45	50
$\mu = 0.00207$	0.00168	0.00137	0.00112	0.00094	0.00080	0.00007

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД ФОРМУЛ, ВЫРАЖАЮЩИХ СИЛУ И КОЭФФИЦИЕНТ ТРЕНИЯ ЦАПФЫ И ПЯТЫ

Приведенные в тексте уравнения

$$F = \frac{\mu \varphi Q}{\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}} \quad \text{и} \quad f = \frac{\mu \varphi}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right) p}\cdot$$

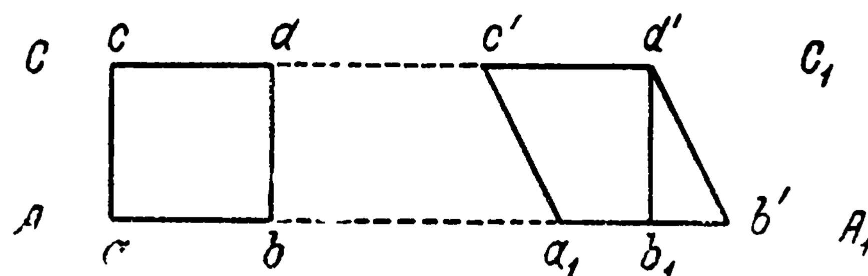
были найдены мною,[1] допуская возможно малое число предположений, поэтому вывод их может некоторым представлять математические трудности. Ввиду практической пользы этих формул, нелишне найти их несколько проще, путем элементарных вычислений; но для такого вывода необходимо допустить еще несколько предположений. Поэтому далее приводится такой вывод с указанием всех необходимых предположений.

Внутреннее трение жидкости изменяет форму ее частей, и если какой-нибудь чрезвычайно малый, жидкий параллелепипед двигается так, что его грани *ab* и *cd* (фиг. 1), остаются

[1] Инж. журн., 1883, № 3. Трение в машинах, стр. 387. В отдельной брошюре под заглавием «Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости» Н. Петрова, стр. 114.

во время всего движения в их плоскостях AA_1 и CC_1 и сила трения увлекает грань ab в направлении AA_1, а другая сила трения задерживает грань cd в обратном направлении, то считают, что при равномерном движении параллелепипеда эти силы взаимно равны и прямо противоположны.

Если в течение какого-нибудь произвольного времени θ точка b пройдет путь bb' и точка d пройдет путь $dd' = bb_1$, то пределы отношений $\frac{bb'}{\theta}$ и $\frac{bb_1}{\theta}$, при безграничном уменьшении времени θ, будут скоростями точек b и d. Назовем их V и v. Путь bb' состоит, очевидно, из двух частей: bb_1 и bb'. Если длина



Фиг. 1

пути bb_1 одинакова с длиной dd', b_1b' есть избыток пути, пройденного гранью ab сравнительно с гранью cd, то предел отношения $\frac{b_1b'}{\theta}$ представит, насколько грань ab двигается скорее грани dc. Это значит, что $w = \frac{b_1b'}{\theta}$ будет скорость относительного движения граней ab и cd.

Чем больше изменится форма параллелепипеда ad при переходе его в форму $a_1'd'$ (фиг. 1) в течение данного времени, т. е. чем больше будет тангенс угла $b_1d'b'$, тем больше должны быть и силы трения на гранях ab и cd, и, сверх того, чем больше будет грань ab, тем больше должна быть сила трения, а потому относительно силы трения, действующей внутри жидкости на грань ab, принимают, что она пропорциональна: 1) величине ω — площади грани ab, и 2) пропорциональна $\frac{b_1b'}{b_1d'}$.

При таких принятых условиях сила трения F', действующая на грань ab, должна выразиться произведением $\omega \cdot \frac{b_1b'}{b_1d'}$, умноженным на некоторый постоянный множитель α, являющийся коэффициентом пропорциональности. Таким образом,

$$F' = \alpha \cdot \omega \frac{b_1b'}{b_1d'}.$$

Величину b_1b' можно здесь заменить произведением относительной скорости w на время θ, в течение которого происходило изменение угла $b_1d'b'$.

Следовательно,

$$F' = \alpha\omega \frac{w\theta}{b_1d'}.$$

Коэффициент пропорциональности α будет иметь величину сообразно со взятым промежутком времени θ. Ту величину α, которую он получит при $\theta = 1$, назовем μ. В таком случае сила трения внутри жидкости, приложенная к площадке ω, будет

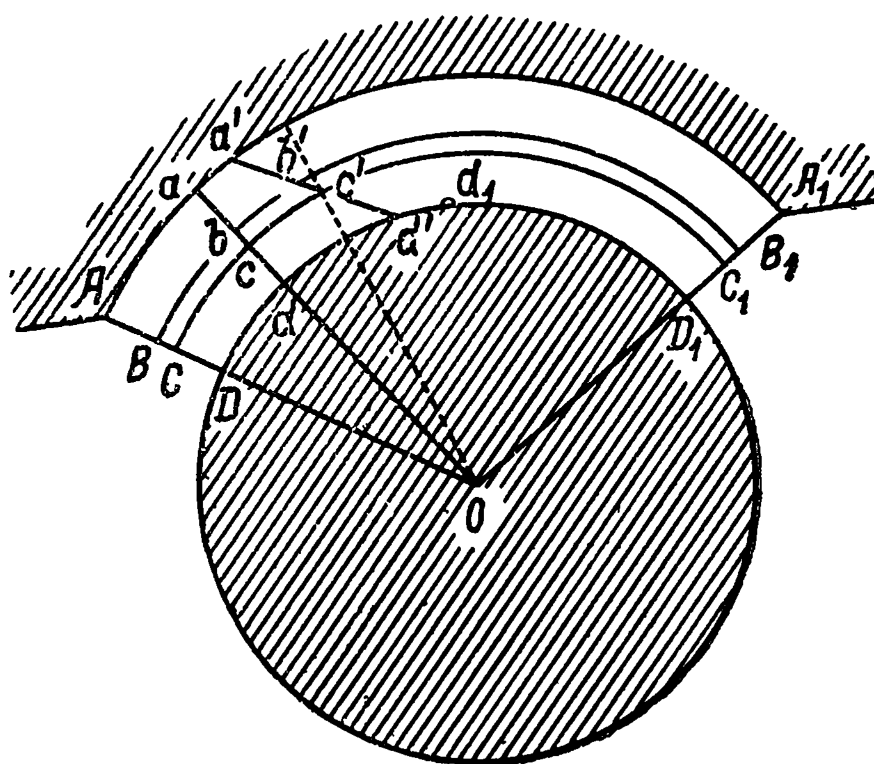
$$F' = \mu\omega \frac{w}{b_1d'}.$$

Силу трения F'', развивающуюся на поверхности прикосновения жидкого тела с твердым, считают пропорциональной: 1) величине ω — площади прикосновения жидкости с твердой поверхностью, вдоль которой происходит движение, 2) скорости скольжения ν жидкости по твердой поверхности. Следовательно, называя коэффициент пропорциональности буквой λ,

$$F'' = \lambda\omega\nu.$$

Для вывода вышеуказанных уравнений, в случае трения цапфы и подшипника положим, что прилагаемая фиг. 2 представляет разрез цилиндрической цапфы и соответствующего подшипника. Круг, описанный радиусом OD из точки O, пред-

ставляет разрез цапфы; линия $Aaa'A_1$ — разрез подшипника; площадка $Aa'A_1D_1d'DA$ представляет разрез смазывающего слоя. Толщина смазывающего слоя при самых малых давлениях едва ли бывает более 0.05 мм; обыкновенно эта толщина бывает в несколько тысячных долей миллиметра. Радиусы цапф самых малых размеров имеют длину во всяком случае в несколько миллиметров. Следовательно, радиус AO может отличаться от OD только на несколько сотых или, гораздо чаще, на несколько тысячных долей своей величины. Следовательно, если в вычислениях тысячные доли не будут приниматься во внимание, то радиусы OA и OD можно будет считать взаимно равными.



Фиг. 2

Несмотря на чрезвычайно малую величину толщины слоя смазывающей жидкости, всегда можно будет себе представить, что множество цилиндрических поверхностей, имеющих одну и ту же ось с осью цапфы, разделяют смазывающий слой на множество чрезвычайно тонких слоев равной толщины.

Один из таких слоев представлен в фиг. 2. Он ограничен дугами BB_1, CC_1.

Двигающаяся цапфа увлечет прикасающийся с ее поверхностью чрезвычайно тонкий слой жидкости. Этот первый слой, двигаясь, вообще говоря, медленнее цапфы, увлечет следующий, второй чрезвычайно тонкий слой, который под влиянием увлекающего трения с первым и задерживающего трения с третьим слоем будет двигаться медленнее первого слоя. Вторым слоем

будет увлечен третий, третий слой будет увлекать четвертый и т. д. В то же время четвертый слой будет задерживать третий, пятый слой будет задерживать четвертый и т. д.; предпоследний слой смазывающей жидкости будет заставлять двигаться последний слой, который будет задерживаться подшипником. Каждый последующий слой будет двигаться медленнее предыдущего, и последний слой может двигаться относительно подшипника.

Если во время равномерного движения цапфы мысленно остановим ее на мгновение, и, проведя через ось O плоскость Oa, заметим в каждом из чрезвычайно тонких слоев частицы жидкости, прилегающие к этой плоскости, то, пустив цапфу двигаться далее попрежнему и по истечении единицы времени остановив ее снова, найдем отмеченные частицы жидкости разных слоев уже не на прежних местах. Частица жидкости, бывшая в точке a, перейдет до точки a'; частица, бывшая в b, перейдет до b'; бывшая в c перейдет до c'; бывшая в d перейдет до d', а точка, принадлежащая поверхности цапфы и бывшая в d, перейдет до точки d_1. Прямой угол, который составляют линия bc с окружностью Bc, после перемещения жидкости изменится, сделается острым и равным $\frac{\pi}{2} - O'b'c'$. Сила трения, которая будет действовать на поверхности, совпадающей с цилиндром, описанным радиусом Ob', будет пропорциональна тангенсу угла $\frac{\pi}{2} - Ob'c$ или той относительной скорости, которая будет для поверхностей цилиндров cc' и bb', удаленных один от другого на расстояние bc, и обратно пропорциональна расстоянию bc.

Можно допустить, что все чрезвычайно тонкие слои, составляющие смазывающий слой, находятся в условиях настолько одинаковых, что во всех слоях относительные скорости на ограничивающих их поверхностях взаимно равны. Если скорость точки c больше скорости точки b на величину w, то на

поверхности $Bbb'B_1$ на каждой квадратной ее единице разовьется сила трения

$$\mu\,\frac{w}{bc}\,.$$

Если толщины всех слоев одинаковы и если изменения вида частиц жидкости во всех слоях будут тоже одинаковы, то можно будет сказать, что и на всякой из цилиндрических поверхностей, разделяющих слой на чрезвычайно тонкие слои, сила трения, развивающаяся на квадратной единице, выразится той же самой формулой.

Величины w и bc, стоящие в этой формуле, можно заменить другими, более удобными. Из рассмотрения фиг. 2 видно, что v'' — скорость точки d' относительно a' — равна сумме относительных скоростей всех слоев, или равна скорости w, умноженной на n — число всех чрезвычайно тонких слоев, т. е. что

$$v''=nw;$$

ε — толщина смазывающего слоя равна толщине bc, умноженной на n

$$\varepsilon=n\cdot bc;$$

отсюда ясно, что

$$\mu\,\frac{\omega}{bc}=\mu\,\frac{n\omega}{nbc}=\mu\,\frac{v''}{\varepsilon}\,.$$

Сила трения, развивающаяся на квадратной единице поверхности оси, выразится произведением коэффициента λ и скорости v' скольжения слоя по цапфе, т. е. формулой

$$\lambda v'.$$

Точно так же сила трения на квадратной единице поверхности прикосновения смазывающего слоя и подшипника выра-

зится произведением некоторого множителя λ, умноженного на скорость скольжения v'' слоя по подшипнику, т. е. формулой

$$\lambda_1 v''.$$

В первом, чрезвычайно тонком слое, прилегающем к цапфе, выделим объем, ограниченный поверхностью цапфы и другой, чрезвычайно близкой к ней цилиндрической поверхностью нашего слоя, двумя чрезвычайно близко лежащими плоскостями, проходящими через ось, и двумя плоскостями, перпендикулярными к оси. Такой элемент можно будет считать параллелепипедом. Силы трения, развивающиеся на его поверхностях, можно будет считать взаимно равными и, обозначая через ω поверхность прикосновения с цапфою, можно будет сказать, что сила трения, на ней развивающаяся, будет

$$\omega\lambda v',$$

а равная ей сила трения, развивающаяся на другой поверхности, обращенной к жидкости, будет

$$\omega\mu\frac{v''}{\varepsilon},$$

откуда следует, что

$$\omega\lambda v' = \omega\mu\frac{v''}{\varepsilon},$$

или

$$\lambda v' = \frac{\mu v''}{\varepsilon}.$$

Рассуждая точно так же относительно частиц чрезвычайно тонкого слоя, прилегающего к подшипнику, можно сказать, что на поверхности ω, прилегающей к подшипнику, разовьется сила

$$\omega\lambda_1 v''',$$

а на поверхности ω, обращенной к жидкости, разовьется сила

$$\omega\mu\frac{v''}{\varepsilon},$$

откуда вытекает, что

$$\lambda_1 v''' = \frac{\mu v''}{\varepsilon},$$

или

$$\lambda v' = \lambda_1 v''' = \frac{\mu v''}{\varepsilon}.$$

Сумма моментов сил трения, приложенных к подшипнику, взятая относительно оси вращения цапфы, будет

$$OA \sum \omega\lambda_1 v''',$$

или, так как λ_1 и v''' одинаковы для всех частиц жидкости, прилегающих к подшипнику, то

$$AO \sum \omega\lambda_1 v''' = AO\lambda_1 v''' \sum \omega;$$

и очевидно, что $\Sigma\omega$ есть величина всей цилиндрической поверхности Q, принадлежащей подшипнику и заключенной между производящими, соответствующими точкам A и A_1. Следовательно, сумма моментов сил трения, приложенных к подшипнику, будет

$$M_1 = \lambda_1 v''' \cdot AO \cdot Q.$$

Совершенно так же найдется, что сумма моментов сил трения, приложенных к цапфе, взятая с обратным знаком, будет

$$M = \lambda v' \cdot OD \cdot Q',$$

где Q' есть часть цилиндрической поверхности цапфы, заключенная между производящими D и D_1.

Выше было уже сказано, что по причине чрезвычайно малой разницы радиусов OA и OD их можно считать одинаковыми, а если это так, то придется считать одинаковыми и поверхности Q и Q'. В таком случае, называя F — силу трения, приложенную к подшипнику или цапфе, r — радиус цапфы, можно будет написать, что

$$Fr = \lambda v' Qr = \lambda_1 v''' Qr = \frac{\mu v''}{\varepsilon} Qr.$$

Скорости v', v'' и v''' можно заменить скоростью v на поверхности цапфы относительно подшипника.

Если представленное на фиг. 2 перемещение произошло при равномерном движении в течение одной секунды, то

$$v''' = aa', \qquad v'' = dd' - aa' \quad \text{и} \quad v = dd_1.$$

Скорость скольжения жидкости по поверхности цапфы $v' = d'd_1$; следовательно,

$$v = dd' + d'd_1 = v'' + v''' + v'.$$

Из предшествующих равенств имеем, что

$$v' = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{F}{Q}, \qquad v'' = \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{F}{Q} \quad \text{и} \quad v''' = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{F}{Q}.$$

Вставляя вторые части этих трех уравнений в предыдущее равенство, найдем, что

$$v = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\varepsilon}{\mu}\right) \frac{F}{Q},$$

а отсюда уже тотчас получаем уравнение

$$F = \frac{\mu v Q}{\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}}.$$

Называя теперь

P — полное давление на поверхность Q и

p — давление, приходящееся на квадратную единицу поверхности, найдем, что

$$P = pQ, \quad \text{или что} \quad Q = \frac{P}{p}$$

и, следовательно,

$$F = \frac{\mu v}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\nu}{\lambda_1}\right) p} P,$$

откуда и видно, что коэффициент трения

$$f = \frac{\mu v}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right) p}.$$

Если заметим, что величину $\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\sqrt{p}$ можно считать постоянной, и обозначим ее

$$k = \left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\sqrt{p},$$

то, припоминая, что

$$\sqrt{p} = \sqrt{\frac{P}{Q}},$$

найдем

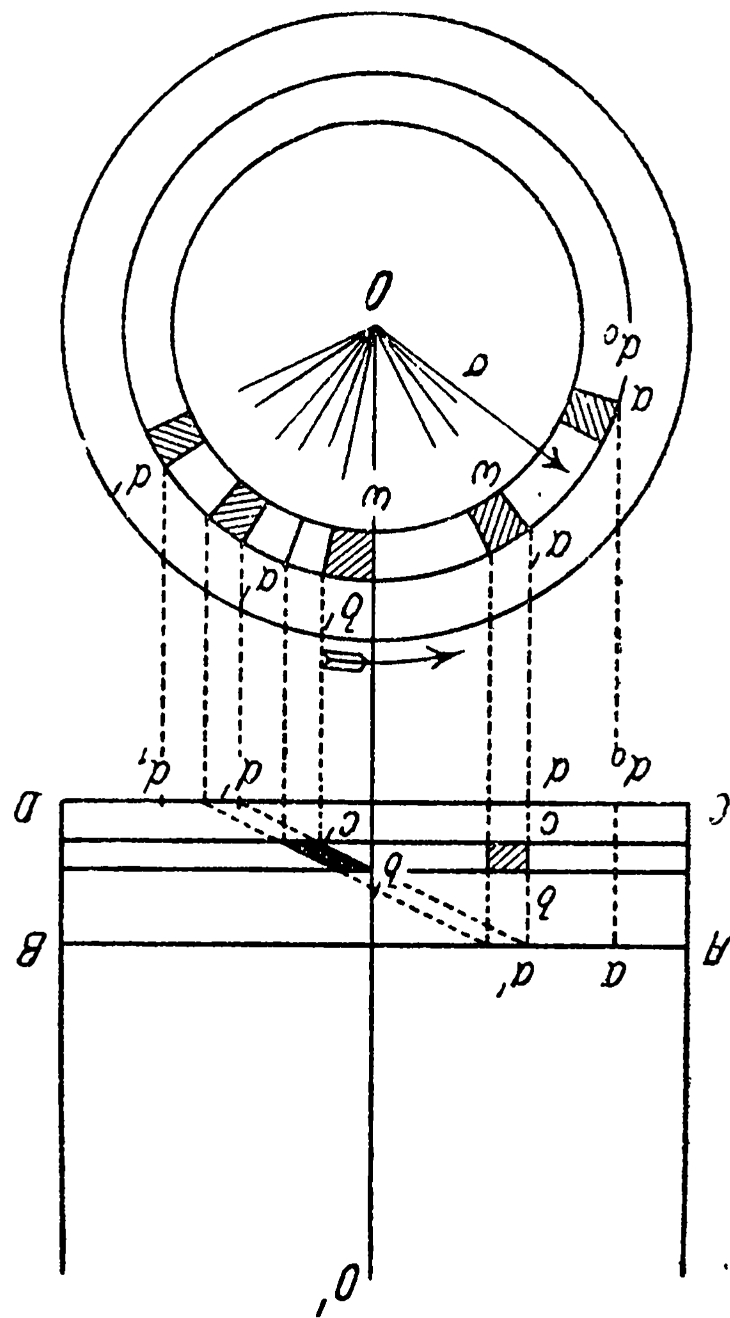
$$F = \frac{\mu v \sqrt{Q} \sqrt{P}}{k}$$

и

$$f = \frac{\mu v \sqrt{Q}}{k \sqrt{P}}.$$

Хотя формулы, выражающие силу трения F и коэффициент трения f, найдены из рассматривания цапф цилиндрической формы, у которых только радиус не очень мал, то ни та, ни другая формула, не заключают в себе величины радиуса, следовательно они могут быть применены к поверхностям, описанным бесконечно большими радиусами, или, другими словами, относятся к поверхностям плоским.

Вид формулы, выражающей силу трения круглой плоской пяты, трущейся по круглому, плоскому подпятнику, можно найти, рассуждая подобно предыдущему.



Фиг. 3

Можно *допустить*, что смазывающий слой $ABCD$ (фиг. 3) как бы состоит из множества чрезвычайно тонких, плоских слоев равной толщины, подобных слою $bcb'c'$. Каждый такой слой остается плоским во все время движения, но форма его частиц изменяется, и если в известное мгновение она имела вид прямого параллелепипеда bc с основанием ω, то после некоторого перемещения она получает уже вид наклонного параллелепипеда $b'c'$ с тем же основанием ω. Относительные вращения каждой пары таких слоев можно считать взаимно равными. Если в какое-нибудь мгновение ряд жидких элементов составлял прямоугольный параллелепипед, имел свои основания на плоскостях AB и CD в положениях a и d_0, то после некоторого вращения плоскости CD около оси OO', при неподвижном

состоянии плоскости AB, верхний элемент жидкости передвинется в положение a', жидкий элемент в слое bc не останется прямо под a', а займет положение $b'c'$, жидкий элемент, двигающийся по плоскости CD, перейдет до положения d', а элемент самой плоскости d_0 переместится в положение d_1. Все эти элементы будут вращаться около оси OO', сохраняя от нее свои расстояния; в то же время все жидкие элементы изменят свой вид, сделаются параллелепипедами наклонными, вроде $b'c'$, вместо прямых, как bc. Если относительная скорость вращения элемента ω будет w, то сила трения, которая разовьется на поверхности ω, будет

$$\mu\omega\frac{w}{bc}.$$

На соответствующем элементе, двигающемся по плоскости AB при скорости v' относительно этой плоскости, сила трения будет

$$\lambda\omega v';$$

на соответствующем элементе жидкости, двигающемся по плоскости CD со скоростью v''' относительно плоскости, сила трения будет

$$\lambda_1\omega v'''.$$

В случае равномерного движения в течение единицы времени скорости v' и v''' будут равны длинам дуг aa' и $d'd_1$; а скорость w найдется, если длину дуги dd' разделим на число слоев n; называя v'' скорость dd', можно, стало быть, сказать, что $w=\frac{v''}{n}$. Если же полную толщину слоя $ABCD$ назовем через ε, то $bc=\frac{\varepsilon}{n}$, откуда видно, что

$$\mu\omega\frac{w}{bc}=\mu\omega\frac{v''}{\varepsilon}.$$

Это последнее выражение относится ко всем тонким слоям, следовательно, и к тем жидким параллелепипедам, которые будут прикасаться к плоскостям AB или CD, а потому

$$\mu\omega\frac{\varphi''}{\varepsilon}=\lambda\omega\varphi'=\lambda_1\omega\varphi''',$$

или

$$\mu\frac{\varphi''}{\varepsilon}=\lambda\varphi'=\lambda_1\varphi'''.$$

Обозначая теперь Ω', Ω'', Ω''' угловые скорости, соответствующие скоростям вращения φ', φ'', φ''', и ε расстояние центра тяжести элемента ω от оси вращения, найдем, что

$$\mu\frac{\Omega''}{\varepsilon}=\lambda\Omega'=\lambda_1\Omega'''.$$

Назовем Ω полную угловую скорость вращения элемента d относительно элемента a; тогда должно будет сказать, что

$$\Omega=\Omega'+\Omega''+\Omega'''.$$

Сумма моментов всех сил трения, приложенных к пяте, взятая относительно оси вращения OO', будет

$$M=\Sigma\lambda\Omega'\omega\varepsilon^2=\lambda\Omega'\Sigma\omega\varepsilon^2=\lambda_1\Omega'''\Sigma\omega\varepsilon^2=\mu\frac{\Omega''}{\varepsilon}\Sigma\omega\varepsilon^2.$$

Обозначая через J момент инерции трущейся поверхности на плоскостях AB и CD, взятый относительно оси OO', найдем, что

$$\Omega'=\frac{M}{J}\cdot\frac{1}{\lambda},\qquad \Omega'''=\frac{M}{J}\frac{1}{\lambda_1},\qquad \Omega''=\frac{M}{J}\frac{\varepsilon}{\mu},$$

а следовательно,

$$\Omega=\frac{M}{J}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{\varepsilon}{\mu}\right),$$

или

$$M = \frac{\mu \Omega J}{\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}}.$$

Формула — совершенно подобная той, которая была найдена для цапф и плоских поверхностей.

Если назовем

Q — площадь трения пяты,

P — полное давление, прижимающее пяту к подпятнику

$$p = \frac{P}{Q}, \qquad J = Qr^2,$$

то

$$M = \frac{\mu \Omega r^2 Q}{\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}},$$

или

$$M = \frac{\mu \Omega r^2 P}{\left(\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right) p}.$$

Если, сверх того, назовем

F — силу трения, приложенную к пяте на расстоянии r от оси вращения, и

U — скорость, определенную уравнением

$$U = \Omega r,$$

то

$$F = \frac{\mu U \cdot Q}{\varepsilon + \frac{\mu}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda_1}},$$

или

$$F=\frac{\mu U}{\left(\varepsilon+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda_1}\right)p}P,$$

откуда коэффициент трения

$$f=\frac{\mu U}{\left(\varepsilon+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda_1}\right)p}.$$

Если, наконец, заметим, что $\left(\varepsilon+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda_1}\right)\sqrt{p}=k$ есть величина постоянная, то можно сказать, что

$$F=\frac{\mu U\sqrt{Q}\sqrt{P}}{k}$$

и

$$f=\frac{\mu U\sqrt{Q}}{k\sqrt{P}}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

СПОСОБЫ И ПРИБОРЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВНУТРЕННЕГО И ВНЕШНЕГО ТРЕНИЙ ЖИДКОСТИ

Определение величин μ и λ может быть сделано при посредстве особого прибора наблюдением времени, необходимого для протекания данного объема испытуемой жидкости, имеющей некоторую определенную температуру и находящейся под данным давлением, через тонкую трубку, хорошо калиброванную и измеренную.

Обозначая

μ — в единицах веса внутреннее трение жидкости, приходящееся на квадратную единицу поверхности, при относительной скорости, равной единице в единицу времени;

λ — внешнее трение, приходящееся на единицу поверхности прикосновения жидкости со стенкой трубки, при движении жидкости вдоль по стенке со скоростью, равной единице в единицу времени, выраженное отношением веса к единице длины;

D — диаметр трубки в принятых единицах длины;

L — длину трубки в тех же единицах;

H — выраженную в единицах веса разность давлений, действующих на концах наблюдаемой трубки, приходящуюся на квадратную единицу поверхности;

Q — объем протекшей во время наблюдения жидкости, выраженный в кубических единицах;

θ — время протекания объема Q, выраженное в тех же единицах, которые приняты для скоростей;

t — температуру жидкости, протекающей через трубку; тогда для определения величины μ, соответствующей температуре t, можно написать уравнение[1]

$$\mu = \frac{\pi D^4 H\theta}{128LQ}\left(1 + \frac{8}{D}\frac{\mu}{\lambda}\right).$$

Этого одного уравнения вполне достаточно для определения искомой величины μ, если только, с достаточной точностью, можно принимать, что число $\frac{8}{D}\frac{\mu}{\lambda}$ очень мало сравнительно с единицей.

Величину λ из того же уравнения определить нельзя.

Для более точного определения величины μ и для определения λ, или, все равно, $\nu = \frac{\mu}{\lambda}$, надо иметь другое наблюдение, произведенное с той же жидкостью, протекавшей при той же температуре t через другую трубку.

Если назовем D_1, L_1, H_1, Q_1, θ_1 величины, соответствующие вышеприведенным, но относящиеся ко второму наблюдению, и, сверх того, обозначим для краткости

$$\frac{\pi D^4 H\theta}{128LQ} = A \quad \text{и} \quad \frac{\pi D_1^4 H_1\theta_1}{128L_1Q_1} = A_1,$$

то получим два уравнения

$$\mu = A + \frac{8}{D}A\nu, \qquad \mu = A_1 + \frac{8}{D_1}A_1\nu,$$

[1] Вывод этого уравнения можно найти в Инженерном журнале, 1883, № 2 (стр. 106—122), или в отдельном издании моей статьи: «Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости», стр. 36—52.

откуда

$$\mu + AA_1 \frac{D - D_1}{A_1 D - A D_1}$$

и

$$\nu = \frac{DD_1}{8} \frac{A - A_1}{A_1 D - A D_1},$$

или

$$\lambda = 8 \frac{AA_1}{DD_1} \frac{D - D_1}{A - A_1}.$$

Хотя, повидимому, такое определение обеих величин, μ и λ, не представляет никаких затруднений, но сделать все необходимое на самом деле, чтобы осталось решить эти простые уравнения, оказывается совсем не так легко. Трудность производства таких двух наблюдений, которые годились бы для приведенных уравнений, происходит оттого, что величины μ весьма сильно изменяются при изменении температуры, и следовательно, величины μ, относящиеся к двум опытам, только тогда можно считать одинаковыми, если температуры обоих опытов различаются достаточно мало. Разницу температуры нельзя допускать даже в сотых долях градуса Цельсия. Достигнуть этого можно,[1] но не иначе, как при необыкновенных предосторожностях и при особом навыке к производству таких опытов. Поэтому, делая определения величины μ для практических целей, надо производить опыты в таких условиях, чтобы можно было довольствоваться одним первым членом, приведенным в уравнении, т. е. чтобы величина $\frac{8}{D}\frac{\mu}{\lambda}$ была достаточно малая дробь.

Опыты, сделанные со стеклянными трубками, показали, что величина μ/λ имеет разные значения при разных температурах

[1] См. «Описание и результаты опытов над трением жидкостей и машин», стр. 65 и след., или Изв. СПб. практического технологического института за 1885 г., стр. 65.

и что в пределах температур произведенных наблюдений она увеличивается при понижении температуры масла.

Так, если единицами меры будем считать миллиметры, миллиграммы и секунды, то результаты опытов будут:

Для спермацетового масла

$t°$ C	μ, мг	λ	μ/λ, мм
19.05	0.00393067 (1 ± 0.0057)	0.562 (1 ± 0.056)	0.0070 (1 ± 0.06)
22.22	0.00333013 (1 ± 0.0040)	2.67 (1 ± 0.365)	0.0012 (1 ± 0.37)
59.76	0.00104749 (1 ± 0.0027)	3.60 $\begin{pmatrix}1+1.31\\1-1\end{pmatrix}$	0.0003 $\begin{pmatrix}1+1.31\\1-1\end{pmatrix}$

Для оливкового масла

$t°$ C	μ, мг	λ	μ/λ, мм
12.17	0.013097 (1 ± 0.0148)	1.27 (1 ± 0.18)	0.0103 (1 ± 0.19)
16.17	0.010528 (1 ± 0.0067)	2.50 (1 ± 0.19)	0.0042 (1 ± 0.19)
21.30	0.079496 (1 ± 0.0023)	7.50 (1 ± 0.23)	0.0011 (1 ± 0.23)
21.52	0.0079379 (1 ± 0.0039)	6.58 (1 ± 0.31)	0.0012 (1 ± 0.31)
62.15	0.0017818 (1 ± 0.0040)	9.37 $\begin{pmatrix}1+3.3\\1-1\end{pmatrix}$	0.0002 $\begin{pmatrix}1+3.3\\1-1\end{pmatrix}$

Для сурепного масла

$t°$ C	μ, мг	λ	μ/λ, мм
11.35	0.016527 (1 ± 0.0022)	0.57 (1 ± 0.05)	0.029 (1 ± 0.05)
19.57	0.0093853 (1 ± 0.0101)	7.62 (1 ± 0.20)	0.0012 (1 ± 0.20)
30.94	0.0057503 (1 ± 0.0022)	7.66 (1 ± 0.33)	0.00075 (1 ± 0.33)
41.16	0.0039422 (1 ± 0.0040)	3.67 (1 ± 0.29)	0.00108 (1 ± 0.29)

Масло минеральное светлое

$t°$ C	μ, мг	λ	μ/λ, мм
18.44	0.02379 (1 ± 0.00705)	1.686 (1 ± 0.107)	0.014
34.39	0.007941 (1 ± 0.00600)	2.54 (1 ± 0.180)	0.003

Масло минеральное черное

$t°$ C	μ, мг	λ	μ/λ, мм
12.86	0.0219 (1 ± 0.00212)	1.029 (1 ± 0.075)	0.021
50.32	0.00252 (1 ± 0.00590)	5.46 (1 ± 0.783)	0.0004

Пользуясь этой таблицей, можно без большого труда определить диаметры трубок, годных для производства наблюдений с данной точностью.

Если требуется, чтобы относительная ошибка в определении величины μ была не более m, т. е. что величина μ', определенная наблюдением, должна удовлетворять уравнению

$$\mu=\mu'(1\pm m);$$

если в то же время известно, что истинные величины D, L, Q, H и θ могут отличаться от полученных измерениями D', L', Q', H' и θ' так, что

$$D=D'(1\pm d),\qquad L=L'(1\pm l),\qquad Q=Q'(1\pm q),$$
$$H=H'(1\pm h)\quad \text{и}\quad \theta=\theta'(1\pm \theta),$$

где d, l, q, h и $\bar\theta$ суть абсолютные величины возможных ошибок измерения, то найдем уравнение

$$\mu=\frac{\pi D'^4H'\theta'}{128L'Q'}\,\frac{(1\pm d)^4(1\pm h)(1\pm\bar\theta)}{(1\pm l)(1\pm q)}\left(1+\frac{8}{D}\frac{\mu}{\lambda}\right).$$

Если величины d, h, $\bar\theta$, l и q очень малы, то, ограничиваясь первым порядком их величин, можно написать, что

$$\mu=\frac{\pi D'^4H'\theta'}{128L'Q'}\left[1\pm(4d+h+\bar\theta+l+q)+\frac{8}{D}\frac{\mu}{\lambda}\right].$$

Сравнение этого уравнения с уравнением $\mu=\mu'(1+m)$ показывает, что $4d+h+\bar\theta+l+q+\frac{8}{D}\frac{\mu}{\lambda}$ должно быть не больше m или что

$$m>4d+h+\bar\theta+l+q+\frac{8}{D}\frac{\mu}{\lambda},$$

откуда видно, что

$$D>\frac{8}{m-4d-h-\bar\theta-l-q}\,\frac{\mu}{\lambda},$$

или

$$D' \geqslant \frac{8}{(m - 4d - h - \theta - l - q)(1 \pm d)} \frac{\mu}{\lambda}.$$

Например, если выраженное в миллиметрах μ/λ взято из предыдущей таблицы, то диаметр D' трубки, которая должна быть взята с тем, чтобы было $m < 0.05$, при $d < 0.0001$, $l < 0.0001$, $h < 0.001$, $\theta < 0.001$ и $q < 0.0001$, определится неравенством

$$D' \geqslant \frac{8}{(0.05 - 0.0004 - 0.001 - 0.001 - 0.0001 - 0.0001)(1 - 0.0001)} \frac{\mu}{\lambda}.$$

или

$$D' \geqslant 168 \frac{\mu}{\lambda}.$$

Если опыты предполагается делать с минеральными маслами, при температурах не ниже 15° С, то можно считать, на основании таблицы, что $\frac{\mu}{\lambda} = 0.015$

и

$$D' \geqslant 168 \times 0.015 = 2.5 \text{ мм}.$$

Если бы μ/λ было более 0.02, то

$$D' \geqslant 3.36 \text{ мм}.$$

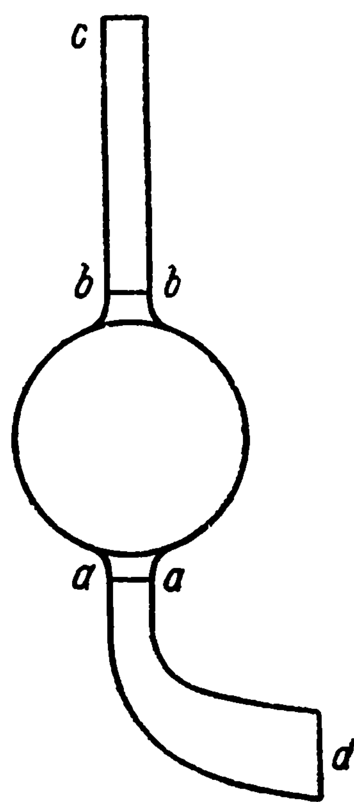
Длина трубки L' должна быть в некоторой соразмерности с диаметром D', без чего уравнение, определяющее μ, оказывается неприменимым.

Если $L' > 200$ D'', то цель достигается вполне удовлетворительно.

Для измерения объема масла, протекшего во время опыта, служит стеклянный сосуд, представленный на прилагаемой фиг. 1. Он состоит из шарика с присоединенными к нему двумя трубками. Одна из них направляется вверх от шарика, а другая сначала вниз, а потом, изгибаясь, принимает направление, немного отличающееся от горизонтального.

На трубках под шариком и над шариком сделаны тонкие кольцеобразные черточки *aa* и *bb*. Объем сосуда между плоскостями *aa* и *bb* измеряется предварительно, и этот-то объем обозначен в уравнениях буквой Q.

Масло, предназначенное для испытания, наливается в сосуд C, изображенный на фиг. 2, через верхнее горлышко, сделанное в виде прямой трубки. В другое, горизонтальное, горло того же сосуда C вставляется трубка, через которую должно совершаться протекание во время опыта. Сосуд и трубка соединяются каучуковой трубкой, плотно обвязанной.



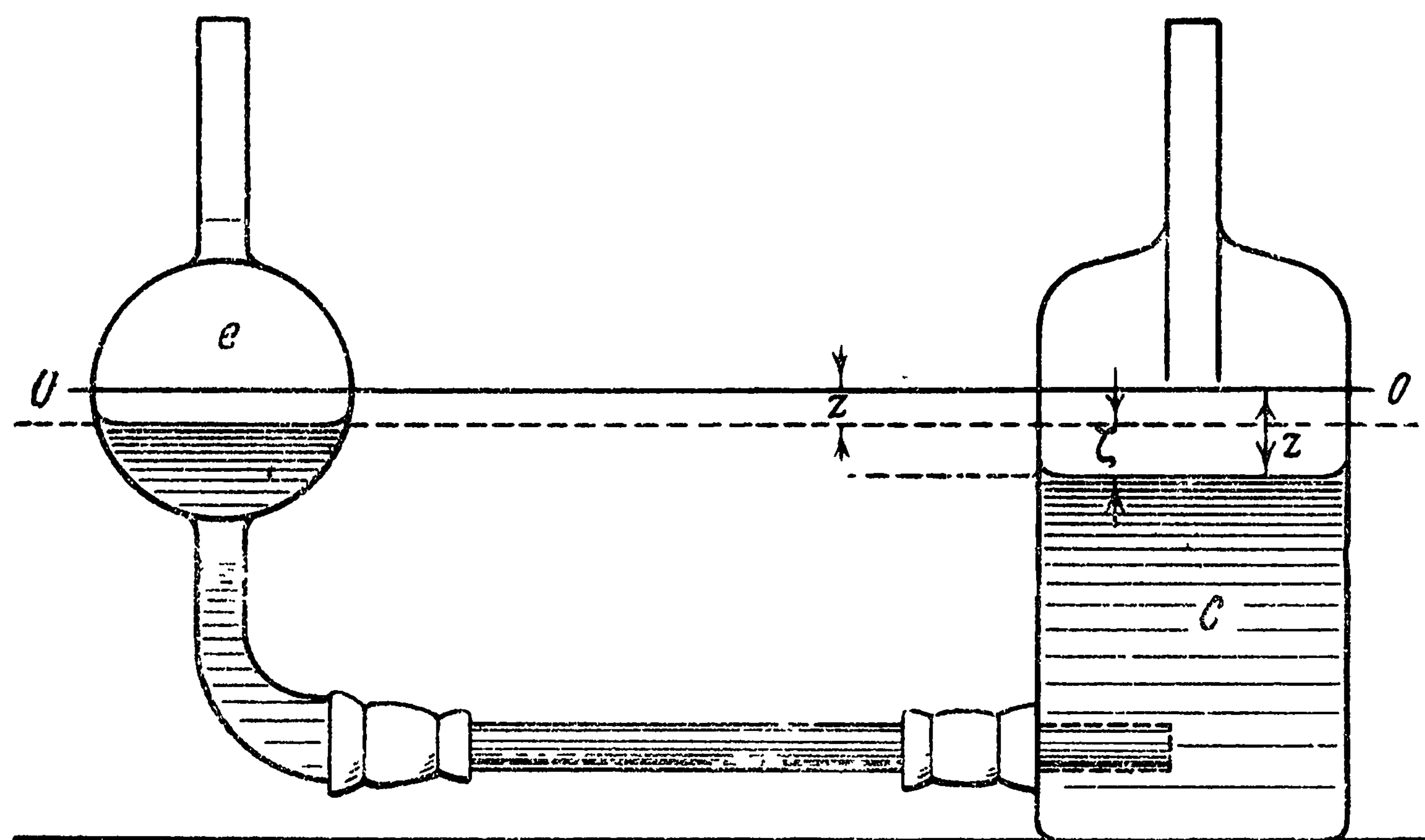
Фиг. 1

Другой конец стеклянной трубки вводится в нижнюю часть сосуда с шариком, и плотное соединение этого сосуда со стеклянной трубкой делается тоже посредством каучуковой трубки.

Давление на жидкость, побуждающее ее двигаться через тонкую трубку и наполнять шарик *e* (фиг. 2), производится сжатым воздухом.

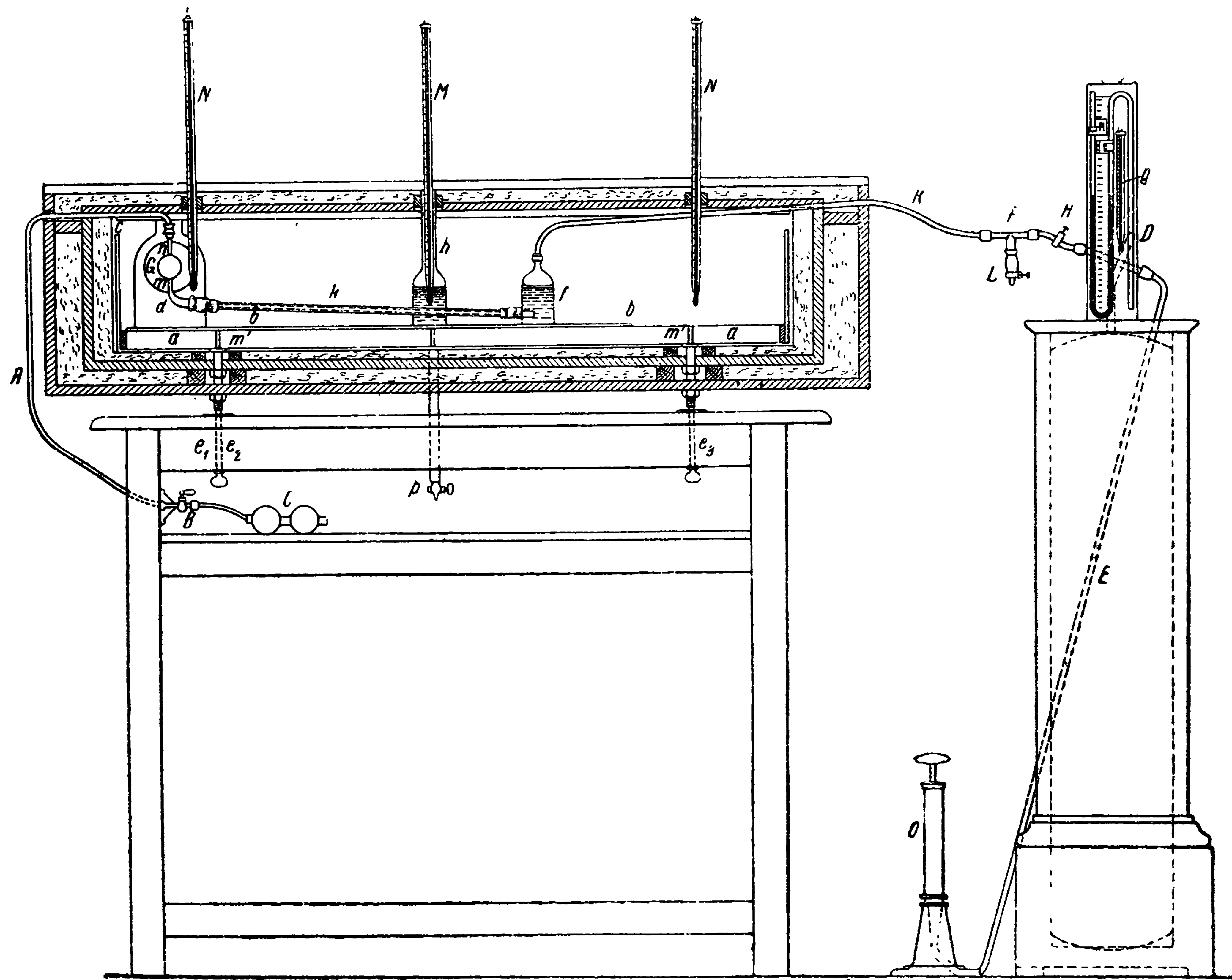
На приложенном изображении всего прибора (см. чертеж на стр. 320), помощью которого определяются величины μ, представлена колонна E, внутри которой помещается показанный пунктирными линиями медный, цилиндрического вида, со сферическими оконечностями, резервуар. Внутренность резервуара посредством трубок сообщается с воздушным нагнетательным насосом O, с поставленным на крышке колонны ртутным манометром и с трубками H, F, k. Оконечность трубки k надевается на вертикальное горло сосуда, содержащего масло и обозначенного на чертеже буквой f. Закрыв кран H, можно насосом O в резервуаре E сгустить воздух до желаемого давления, которое тотчас же указывается ртутным манометром. Ртуть в левом колене манометра поднимается, а в правом опускается. Пользуясь шкалой, поставленной между коленами и ходящими

вдоль шкалы указателями, разность уровней ртути может быть определена без затруднений, и при навыке — с довольно большой степенью точности. Сжатый в резервуаре воздух, при закрытом кране H, очень долго не изменяет своей упругости, если только температура его не переменяется. Закрывая кран L и открывая кран H, произведем давление в сосуде f, тотчас же указываемое манометром; жидкость из сосуда f начнет вытекать трубкой k в шарик G. Чтобы лучше управлять ходом опыта



Фиг. 2

и чтобы начать наблюдение в наиболее удобный момент, верхняя трубка шарика G посредством каучуковой трубки A сообщается с каучуковым нагнетательным насосом C. Закрывая кран B, сообщающий внутренность трубки A с атмосферой, можно насосом C произвести в шарике G желаемое давление, которое, достигнув равновесия с давлением в сосуде f, не позволит жидкости двигаться по трубке k. Достаточно открыть кран B и выпустить таким образом из шарика G сжатый там воздух, чтобы движение жидкости по трубке k началось и происходило беспрепятственно. Остановить это движение можно в



Фиг. 3. Прибор Н. П. Петрова для определения внутреннего трения жидкости.

каждый момент, запирая для этого кран B и действуя нагнетательным насосом C.

Полная величина давления, входящая в формулу под буквой H, для многих случаев прямо указывается манометром, но в случае более точных определений величины H надо принимать в расчет разность уровней масла в сосуде f и в шарике G. Во всяком случае, достаточно определить разность уровней в тот момент, когда шарик G будет наполнен до половины его объема. Для определения этой разности уровней надо перед началом опыта, или лучше по окончании опыта над протеканием через трубку, заставить жидкость действием насоса C наполнить шарик так, чтобы верхний уровень жидкости был у верхней черты n, потом так, чтобы верхний уровень был у черты m, и в обоих случаях определить расстояние уровней жидкости в сосуде f от некоторой горизонтальной плоскости. Средняя арифметическая этих двух измерений $\frac{h_2+h_3}{2}$ доставит расстояние уровня в сосуде f до горизонтальной плоскости в то время, когда шарик G был наполнен до половины его объема. Расстояние черточки m от той же горизонтальной плоскости должно быть тоже измерено; если к этому измерению h_1 прибавим a — расстояние от черточки m_1 до центра шарика G,— то разность $\frac{h_2+h_3}{2} - h_1 - a$ и представит высоту столба жидкости, давление которого вместе с давлением сжатого воздуха заставляет жидкость протекать через трубку k.

Кран L сделан для того, чтобы при закрытом кране H выпускать сгущенный воздух из сосуда f в атмосферу.

Горизонтальная плоскость, до которой должны быть измеряемы расстояния h_1, h_2 и h_3, представляется в приборе верхней поверхностью зеркального стекла bb, лежащего на железной раме aa, которая своими поперечными распорками m', m' опирается на головки трех болтов; эти последние в свою очередь своими нижними концами опираются на болты e_1, e_2, e_3. Болты

e_1, e_2, e_3 проходят через гайки, укрепленные в крышке стола. Посредством болтов e_1, e_2, e_3 верхняя поверхность зеркального стекла bb может быть приведена в горизонтальное положение.

Время наполнения шарика G жидкостью определяется секундными часами весьма легко и просто, если только секундная стрелка может быть пущена в ход или остановлена по произволу. Для более точных наблюдений лучше определять время, прислушиваясь к ударам маятника и отсчитывая их. Продолжительность времени между ударами бывает в часах обыкновенно 0.4 сек. При некотором навыке к наблюдениям можно избежать ошибок более 0.2 сек.

Температура жидкости во все время опыта должна как можно менее изменяться, так как даже весьма небольшие ее перемены уже сильно меняют величину внутреннего трения. Поэтому стеклянный сосуд f с налитой в него испытываемой жидкостью, трубка k и шарик G, предназначенный для наполнения жидкостью, помещаются в сосуде, наполненном водой и окруженном дурными проводниками тепла. Медная, внутри луженая ванна c c c c, в виде прямоугольного параллелепипеда, с широкими отогнутыми краями, помещена в деревянном ящике так, что стенки ящика приблизительно на 25 мм удалены от стенок ванны. Закраины ванны привинчены к ящику. Промежуток между стенками ванны и ящика заполнен ватой. Этот деревянный ящик поставлен во второй, деревянный же ящик, и довольно значительные (25 мм) промежутки между стенками двух ящиков опять заполнены ватой. Металлическая ванна закрывается металлической же крышкой, прикрывающейся деревянной доской; деревянная крышка закрывает первый деревянный ящик и сама закрывается ватным одеялом, сверх которого ложится деревянная крышка, принадлежащая наружному ящику. Медная ванна соединяется с внутренним и с наружным деревянными ящиками посредством тех же болтов, при помощи которых ванна опирается на винты e_1, e_2, e_3.

Для наблюдений над шариком G, находящимся в ванне, сделаны в продольных стенках этой последней круглые отверстия, закрытые зеркальными стеклами в металлических оправах. На эти оправы навинчиваются медные цилиндрические трубы, другие концы которых выступают наружу из деревянного ящика. Наружные концы труб закрываются крышками с зеркальными же стеклами. Через одну из этих труб проникает в ванну свет и освещает шарик, устанавливаемый против отверстий; через другую трубу производится наблюдение. Трубы с их крышками нужны в особенности в тех случаях, когда температура воды, налитой в ванну, ниже температуры той комнаты, в которой происходит наблюдение. Без этих труб стекла ванны потеют и наблюдение становится или невозможным, или по крайней мере затруднительным.

Для определения температуры воды в ванне через крышки пропущены два термометра N и N.

Все описанное относительно устройства прибора дает возможность определять температуру в ванне и поддерживать эту температуру без значительных изменений, но не дает еще возможности убедиться, что и жидкость, налитая в сосуд f, поставленный в ванну, приняла ту же температуру, какую указывают термометры N и N. Для возможно близкого определения температуры жидкости в сосуде f ставится в ванну другой сосуд h, отличающийся от сосуда f только тем, что его горло шире и длиннее горла сосуда f. Сосуд h наполняется таким же количеством испытуемой жидкости, как и сосуд f, и затем в сосуд h вставляется термометр M. Когда все три термометра N, M и N показывают одну и ту же температуру или когда показание термометра M достаточно мало отличается от показаний термометров N и N, тогда можно считать, что и температура жидкости, протекающей через трубку, мало отличается от температуры, указываемой термометрами N и N.

Для производства наблюдений в ванну наливается вода, нагретая несколько выше той температуры, при которой

предполагается делать наблюдение; ванна закрывается, и затем надо дождаться, когда она примет желаемую температуру.

Для выпуска воды из ванны, ко дну ванны приделана трубка с краном P.

Для укрепления шарика G в известном положении на раму *aa* ставится особая держалка d. Для измерения всех выше указанных расстояний h_1, h_2, h_3 надо вынуть из ванны раму *aa* с лежащим на ней зеркальным стеклом, с держалкой d и с поставленными на стекла сосудами f, k и G. Все это может быть поставлено на закрытой крышке наружного ящика, и затем винтами e_1, e_2, e_3 стекло может быть приведено в горизонтальное положение, и все измерения можно произвести на свободе посредством особого наугольника с указателем.

Эти измерения бывают нужны только при довольно точных опытах, так как высота столба масла даже в 50 мм, при разности уровней в ртутном манометре в 150 мм или около того, может быть совершенно пренебрегаема при множестве технических опытов.

После измерения величин h_1, h_2, h_3, если таковые признавались необходимыми, рама *aa* со всеми стоящими на ней предметами должна быть поставлена в ванну, и верхняя поверхность стекла *bb* должна быть приведена в горизонтальное положение. Так как действием веса воды, наливаемой в ванну, может быть изменено положение и самой ванны и стола, ее поддерживающего, то поверхность стекла *bb* может быть выведена из горизонтального положения. Ввиду неудобства действовать уровнем, помещенным на стекло *bb*, покрытое толстым слоем воды, ставится на стекло *bb* треножный столик зеркального стекла. Ножки столика настолько длинны, что стекло его не может быть покрыто водой, наливаемой в ванну. Устройство ножек таково, что ими можно приводить столик в горизонтальное положение. После приведения стекла *bb* в горизонтальное положение на него ставится только что упомянутый столик и приводится тоже в горизонтальное положение. Когда это сделано,

то наливается в ванну вода и проверяется положение столика; если он остается горизонтальным, то и стекло *bb* осталось горизонтальным, если же столик вышел из горизонтального положения, то винтами e_1, e_2, e_3 приводят столик, а вместе с тем и стекло *bb* в горизонтальное положение.

Чтобы произвести наблюдение, надо закрыть ванну, открыть кран H, сгустить насосом C воздух в шарике G так, чтобы жидкость в трубке k оставалась в покое и, дождавшись желаемой температуры, указываемой термометрами N, M и N, отворить кран B и заметить по часам продолжительность времени наполнения шарика G жидкостью.

В заключение остается сказать, что перед каждым опытом трубка k, сосуд f и шарик G должны быть хорошо вымыты и высушены.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ПРИБОРЫ И СПОСОБЫ ПРОИЗВОДСТВА ОПЫТОВ НАД ТРЕНИЕМ В МАШИНАХ

Машина, употреблявшаяся для поверки упомянутых уравнений и графических построений, была предоставлена мне императорским Русским техническим обществом. Она построена на заводе Клейн, Шанцлин и Беккер. После одного ряда опытов с этой машиной, указавшего, между прочим, некоторые ее недостатки, она была мною несколько изменена и дополнена.

Машина для производства опытов с вагонной осью была построена по моему проекту в Петербургских мастерских С.-Петербурго-Варшавской железной дороги на средства железных дорог 1-й группы и предназначалась прямо для предпринимавшихся опытов.

Полное описание устройства обеих машин читатель найдет далее.

Первоначальное устройство машины Клейн, Шанцлин и Беккер показано в трех видах: фиг. 1 — вид машины спереди, фиг. 2— вид ее сбоку и фиг. 3 — план.

Передний и боковой вид машины показывает, что на колонне помещены два подшипника aa' (фиг. 3), обхватывающие ось bb'. На оси bb', у конца b', насажен шкив для ремня, приводя-

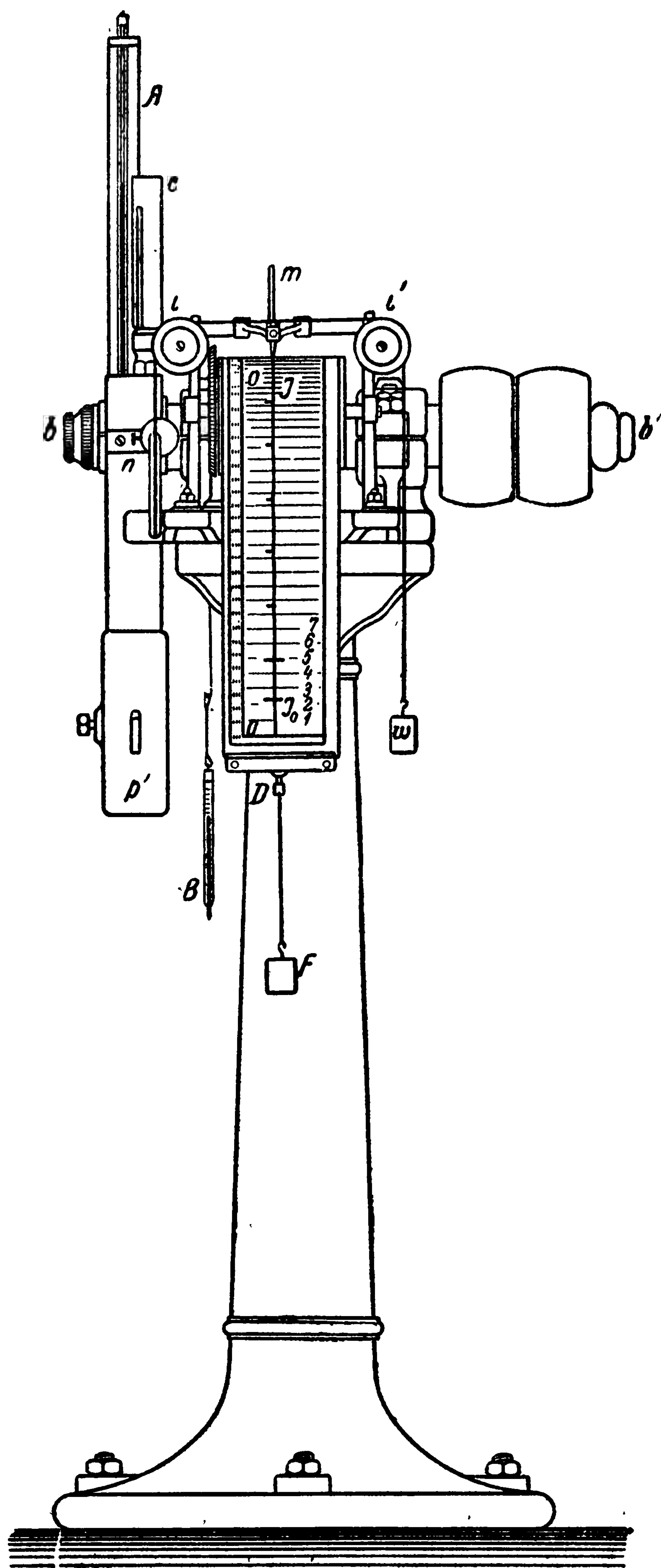
щего ось во вращение; на другом конце оси — цапфа *b*, предназначенная для наблюдений силы трения. Диаметр этой цапфы 59.6 мм, а ее длина 70 мм.

На фиг. 1 видно, что цапфу *b* обнимают два подшипника, верхний и нижний. Этот последний прижат к оси снизу стержнем *c*. Подшипники заключены в длинной скобе *dqq'd'*, имеющей вид очень удлиненной буквы П. Горизонтальная, короткая ее часть *qq'* лежит непосредственно на верхнем подшипнике. Две боковые, длинные, части ее *dq* и *dd'* спускаются вниз и оканчиваются значительно ниже нижнего подшипника. В нижних оконечностях скобы помещены болтики, служащие осями вращения для рычагов *e*, *e'*. Эти рычаги не равноплечны, и их короткие концы, снабженные маленькими стерженьками, ясно видимы на фиг. 1 и в особенности на фиг. 7, подпирают стержень *c* и, таким образом, прижимают и нижний и верхний подшипник к цапфе *b*. Во время вращения оси *bb'* возбуждается трение, действующее на поверхностях цапфы *b* и только что описанных двух обнимающих подшипников. Это-то трение и подлежит наблюдениям. Опытами можно определять зависимость этого трения от давления, которому подвергаются подшипники, от скорости, температуры и свойств смазывающей жидкости.

Когда в описываемой машине подшипники прижимаются к цапфе весом скобы *dqq'd'* со всеми ее принадлежностями и весом рычагов *e*,*e'*, тогда сила, прижимающая верхний подшипник, $P'_1=262$ кг, нижний подшипник $P'_2=237$ кг.

В обыкновенных машинах цапфы таких размеров, как цапфа *b* (диаметр 59.6 и длина 70 мм), подвергаются гораздо более значительным усилиям, чем только что приведено; поэтому для увеличения давлений, прижимающих подшипники к цапфе, на рычаги *e*, *e'* надеваются передвижные грузы.

Очевидно, что, чем дальше отодвинутся грузы *p* и *p'* от соответственных осей вращения *d*, *d'*, тем больше будут силы, прижимающие подшипники к цапфе.



Фиг. 1

Если через l назовем длину коротких плеч рычагов e и e' и через L — расстояние от осей вращения d и d' до соответственных центров тяжести грузов p и p', то сила, вызванная грузами p и p' для прижатия нижнего подшипника, будет

$$P_1'' = \frac{L}{l}(p + p'),$$

а сила, прилагаемая к верхнему подшипнику,

$$P_2'' = \left(1 + \frac{L}{l}\right)(p + p').$$

Полные силы, прижимающие подшипники к цапфе, были для верхнего подшипника:

$$P_1 = p_1' + p_1''$$

и для нижнего подшипника:

$$P_2 = p_2' + p_2''.$$

Сумму сил $P_1 + P_2$ можно изменять в машине в пределах от 500 до 3000 кг.

Для установки грузов p и p' на рычагах e и e' сделаны деления, а к грузам прикреплены крючки, служащие указателями делений на поверхности рычагов.

Вращение оси под влиянием давлений P_1 и P_2 возбуждает силы трения; величины их назовем: F_1—на верхнем подшипнике. F_2— на нижнем подшипнике.

Машина дает возможность измерять сумму сил

$$F = F_1 + F_2.$$

Способ измерения этой суммы основан на том, что каждая из сил F_1 и F_2 стремится вращать скобу с рычагами e, e',— а если на рычагах e, e' надеты грузы p и p', то и с грузами,— в направлении вращения оси; а сила тяжести стремится

удерживать скобу в отвесном положении. Отклонение скобы от отвесного положения дает возможность определять силу F.

Обозначим d — диаметр цапфы b; тогда сумма моментов сил трения F_1 и F_2 относительно оси цапфы будет

$$\frac{d}{2}[F_1 + F_2] = M.$$

M — сумма моментов сил трения, действующих на цапфу — определяется легко в тех случаях, когда действие сил тяжести, приложенных к скобе с рычагами и грузами, уравновешивает действие сил трения. Действительно, если под влиянием сил трения центр тяжести скобы со всеми ее принадлежностями выйдет из вертикальной плоскости, проходящей через ось цапфы, и удалится от нее на некоторое расстояние k, то, означая через q вес скобы со всеми телами, составляющими с нею как бы одно твердое тело, надо сказать, что сумма моментов сил тяжести отклонившейся системы относительно геометрической оси цапфы будет

$$kq.$$

Если скоба, отклонившись от отвесного положения, останется в покое, то

$$kq = \frac{d}{2}(F_1 + F_2) = M. \tag{1}$$

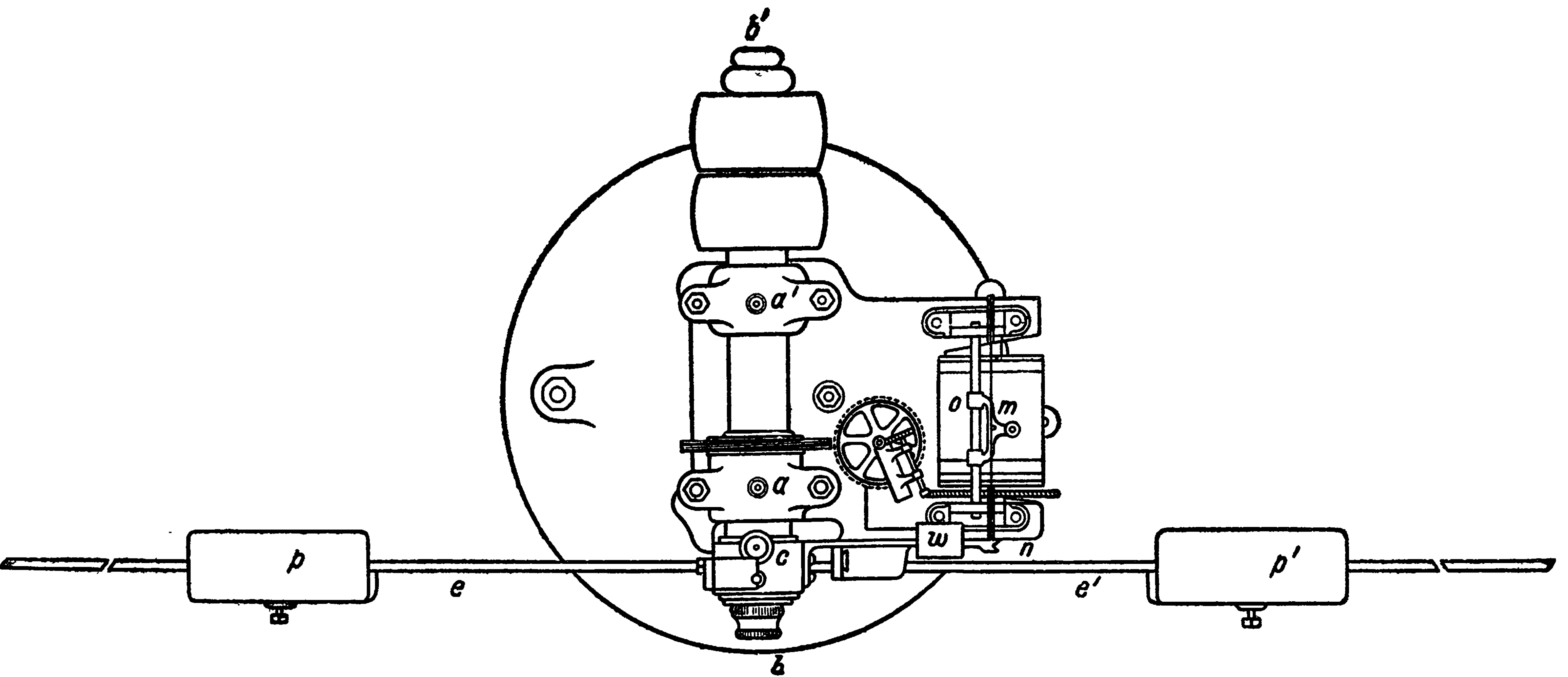
Для определения расстояний k к скобе прикреплен крючок bn (фиг. 1, 2 и 3); каждому перемещению центра тяжести скобы, т. е. каждой величине k, соответствует некоторое определенное перемещение конца n крючка bn, и если назовем

h — расстояние центра тяжести скобы до геометрической оси вращения цапфы b;

α — угол отклонения плоскости, проходящей через геометрическую ось цапфы и через центр тяжести скобы, от вертикальной плоскости, проведенной через ту же ось, то

$$k = h \sin \alpha.$$

Фиг. 2



Фиг. 3

Дуга S, описанная концом крючка bn, длину которой обозначим через l', при угле отклонения α будет

$$S = l'\alpha.$$

При опытах углы α не превосходят 5°, а при таких углах длина дуги α и величина ее синуса, $\sin\alpha$, различаются между собой не более чем в десятитысячных их долях, и, следовательно, с точностью до десятитысячных долей можно считать α и $\sin\alpha$ взаимно равными и писать

$$k = \frac{h}{l'} S.$$

Это уравнение вместе с (1) показывает, что

$$F_1 + F_2 = 2\frac{hs}{dl'} q. \qquad (2)$$

Вес q (скобы с одними рычагами e, e' или и с грузами p, p') и длины d, l', h должны быть определены для каждого отдельного опыта; но длина S может изменяться в течение одного и того же опыта.

Для постоянного измерения длины S сделан особый, весьма простой прибор. На конце n рычага bn (фиг. 1) сделан крючок с желобком, у которого дно (фиг. 8) представляет дугу круга, описанного из центра, лежащего на геометрической оси цапфы. На крючке bn, у нижнего конца только что упомянутой дуги, укреплена струна. Она сначала направляется вверх, следуя дну желобка на крючке bn, а потом, дойдя до вертикальной линии, касательной к описываемой окружности, струна принимает вертикальное направление; таким образом, она приходит в прикосновение с блоком i (фиг. 2); обогнув этот блок на четверти окружности, она принимает горизонтальное направление и попадает на другой блок i'; затем, обогнув этот блок тоже на четверти окружности, спускается вертикально вниз.

К нижнему концу струны прикреплен грузик, вытягивающий ее. Эта гирька, вытягивая струну, вместе с тем стремится вращать скобу $dgg'd'$ около цапфы, а потому для уравновешения действия гирьки w, на крючок bn надевается другая гирька W.

Если струна достаточно вытянута и если вращение блоков i и i' не сопровождается чувствительным трением, то, при движениях крючка bn, каждая точка струны перемещается по ее направлению как раз настолько же, насколько перемещается точка n. Поэтому, если к струне прикрепить карандаш m (фиг. 1, 2 и 3), то при передвижении точки n на величину s и острие карандаша m передвинется тоже на длину s. Если под карандаш m поместить бумагу и прижать к ней острие карандаша в то время, когда цапфа b не вращается и, стало быть, когда силы трения F_1 и F_2 равны нулю, а затем, не двигая бумаги, заметить положение карандашного острия при действии некоторой суммы сил $F_1 + F_2$, отклонившей скобу от ее первоначального положения, то увидим, что карандаш отодвинулся от первоначального своего положения на некоторое расстояние s. Измерив это перемещение и вставив его длину в уравнение (2), тотчас же определим сумму $F_1 + F_2$.

Под карандашом помещен в машине цилиндрический барабан O, вращающийся на горизонтальной оси. На барабан навивается довольно длинная бумажная лента, шириной почти равная длине цилиндра O. Эта лента, укрепленная одним концом к барабану, лежит на верхней его поверхности и спускается другим концом свободно вниз, как показывают фиг. 1 и 2. К спускающемуся концу ленты D подвешена на шнурке гирька F, которая постоянно стремится опускать ленту вниз и держит ее в вытянутом состоянии, плотно прижатой к поверхности барабана O. Барабан O системой зубчатых колес и бесконечных винтов связан с осью bb', так что вращение его происходит пропорционально вращению оси bb'. Приступая к опыту, прикрепляют один конец заранее заготовленной бумажной ленты к барабану так, чтобы она, навиваясь на цилиндрическую

поверхность барабана, одним из своих продольных краев укладывалась приблизительно вдоль края цилиндрической поверхности барабана; устанавливают скобу $dgg'd'$ так, чтобы центр тяжести ее и всех ее принадлежностей находился на отвесной линии, проходящей через геометрическую ось цапфы b; скрепляют карандаш m со струной и прижимают острие карандаша к ленте. Потом расцепляют зубчатые колеса, соединяющие барабан O с осью bb', и вращают один барабан O так, чтобы лента с него сматывалась. При этом карандаш начертит прямую линию, подобно тому как проведена линия OO на фиг. 2. Когда линия проведена вдоль всей ленты, ленту снова навивают на барабан и снова сцепляют зубчатые колеса, соединяющие барабан O с осью bb'. Если теперь ось bb' привести во вращение, а скобу удерживать в отвесном положении, которое она занимала бы, если бы совсем не развивалось трения между поверхностью цапфы b и ее подшипниками, т. е. как бы сумма $F_1 + F_2 = 0$, то лента будет снова спускаться и карандаш снова пройдет по только что проведенной линии OO. Поэтому линию OO можно назвать нулевой линией.

Если вращение цапфы b будет сопровождаться действием сил трения F'_1 и F_2, то скоба отклонится от отвесного положения, крючок bn поднимется своим концом n, и карандаш m, отойдя от нулевой линии, будет описывать на спускающейся ленте другую линию j_0j (фиг. 2), тем более удаленную от нулевой линии OO, чем больше переместится карандаш m.

Линия j_0j вместе с нулевой линией OO дает очень удобный способ изучения произведенного опыта: расстояния какой-нибудь точки на линии j_0j от конца ее j_0, измеренные по линиям, параллельным нулевой линии OO, определяют продолжительность времени вращения цапфы от начала опыта до того мгновения, когда карандаш пришел в избранную точку на линии j_0j, а длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на линию OO, определит длину s, соответствующую данному моменту. Следовательно, имея перед глазами ленту с начерченными на ней

двумя линиями OO и j_0j, можно будет без затруднения проследить всю последовательность изменения длины s, а с тем вместе и всю последовательность изменения величины суммы сил трения $F_1 + F_2$.

Измерение скорости вращения цапфы делается при посредстве той же бумажной ленты, когда на ней чертится кривая j_0j. Для этого поперек ленты начерчена система взаимно параллельных линий, расположенных на взаимно равных расстояниях, как показано на фиг. 2, где эти линии означены числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Расстояния между линиями делаются такие, чтобы для передвижения ленты под карандашом на одно такое расстояние цапфа должна была сделать N оборотов. Если во время опыта наблюдатель будет замечать по часам те моменты времени, когда острие карандаша будет пересекать поперечные линии 1, 2, 3, то этим самым он определит промежутки времени, необходимые для того, чтобы цапфа сделала N оборотов.

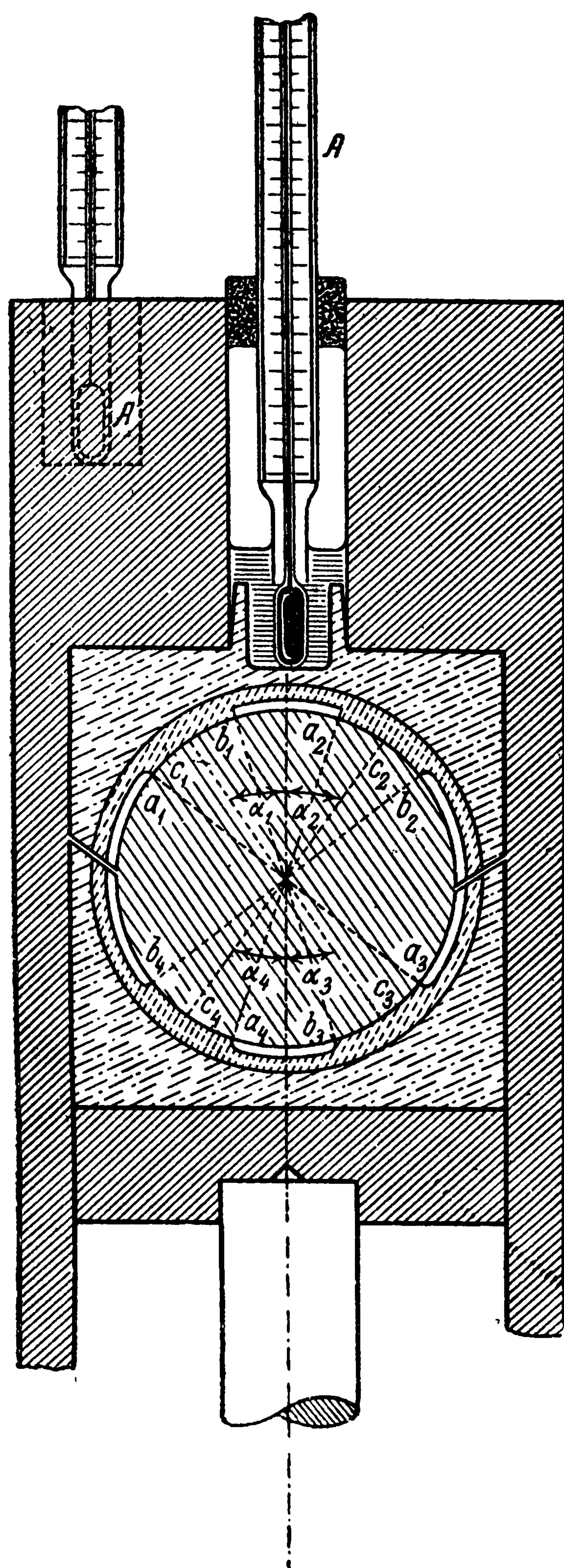
Если назовем

θ — число секунд, соответствующее одному такому промежутку в N оборотов цапфы;

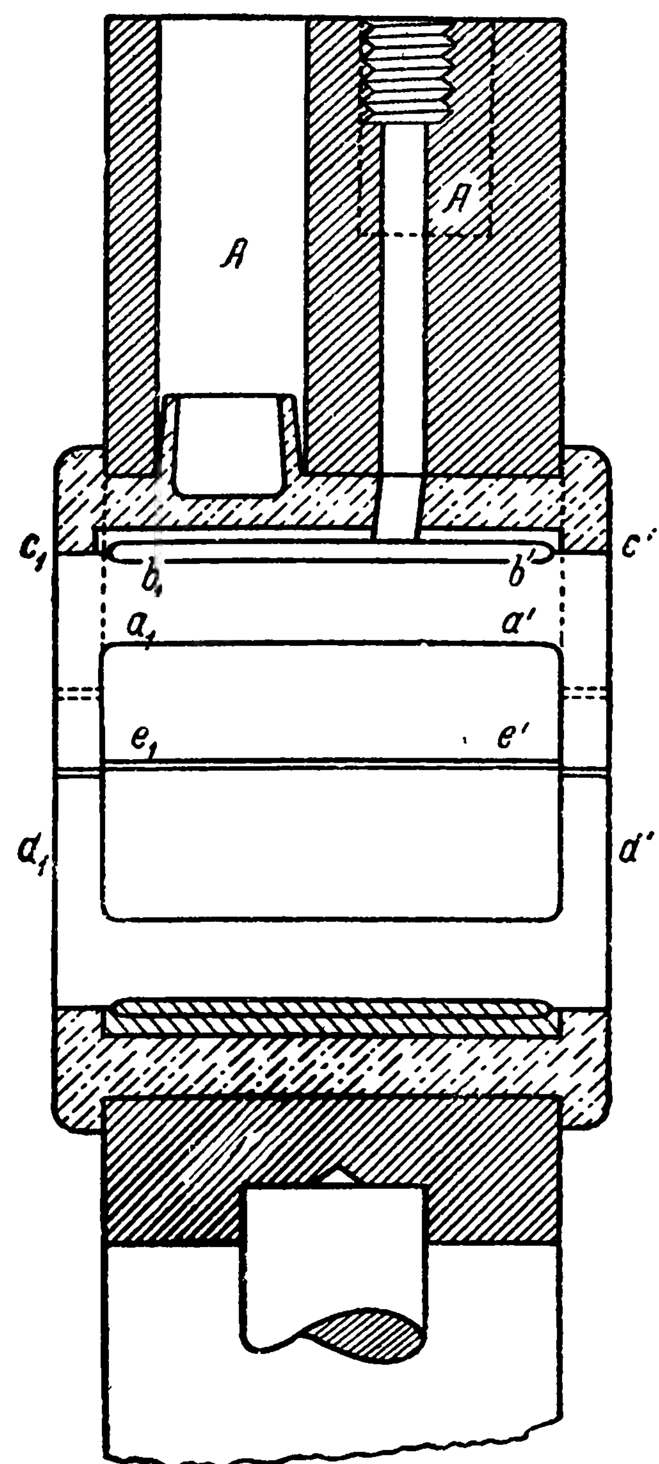
v — среднюю скорость на окружности цапфы, соответствующую этому промежутку времени, то понятно, что величина v определится из уравнения

$$v = \frac{N\pi d}{\theta}. \tag{3}$$

Для определения температуры слоя служит термометр (фиг. 1 и 2). Он проходит через отверстие в верхней горизонтальной части скобы gg', и шарик этого термометра помещается в чашечке верхнего подшипника, как показано на фиг. 4, представляющей в разрезе цапфу b, ее два подшипника и верхнюю часть скобы $dgg'd'$. Чертеж сделан в половину натуральной величины. Положение чашечки подшипника, принимающей шарик термометра, ясно видно из сопоставления фиг. 4 и 5. На фиг. 5 представлен разрез верхнего подшипника и верхней


A
A
a_1 b_1 c_1
a_2 b_2 c_2
α_1 α_2
α_3 α_4
a_3 b_3 c_3
a_4 b_4 c_4

Фиг. 4


A
A
c_1 c'
b_1 b'
a_1 a'
e_1 e'
d_1 d'

Фиг. 5

части скобы плоскостью, проходящей через геометрическую ось цапфы. В чашечку подшипника наливалось масло настолько, чтобы весь шарик термометра был им покрыт, а в верхний конец отверстия в скобе вставлялась пробка, плотно охватывавшая термометр *A*. Для определения температуры внешней помещался термометр *B* (фиг. 1 и 2).

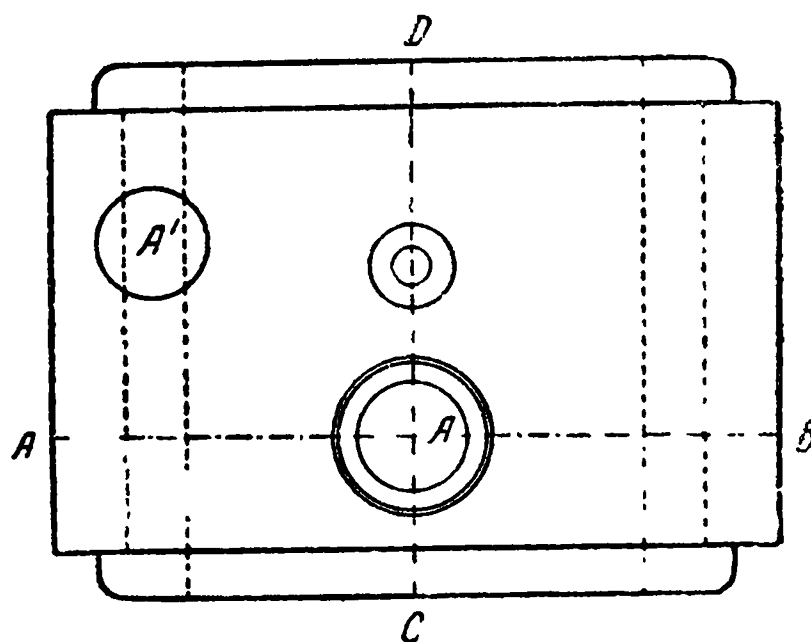
Относительно показаний обоих термометров прежде всего надо заметить, что ими можно пользоваться только в тех случаях, когда термометры оставались достаточно долго среди тел, их окружающих, и когда температуры оставались довольно долго без перемены или когда температуры эти очень мало колеблются около некоторых постоянных величин.

Относительно показаний термометра *A* надо сказать, что и при полном постоянстве его показания нельзя считать температуру шарика *A* равной температуре самого слоя. Температура слоя, впрочем, чрезвычайно мало отличается от температур при поверхностях цапфы и подшипников. Известно, что на поверхностях цапф, соединенных с довольно длинными валами, не подвергающимися никаким особым нагреваниям, температура около свободного конца цапфы немного превосходит температуру около конца, ближайшего к остальному валу; но в разбираемой машине, как видно на фиг. 3, рядом с цапфой *b* находится другая цапфа на той же оси, заключенная в подшипнике *a*, а на поверхности этой последней цапфы происходит нагревание, способствующее уменьшению и без того небольшой разницы температур у концов цапфы *b*.

Следовательно, температура у середины длины цапфы должна, действительно, уже очень мало отличаться от средней температуры на поверхности цапфы *b*.

Судя по тому, что можно было наблюдать на других цапфах, есть основание думать, что отличие температуры у середины длины цапфы *b* если и отличается от средней ее температуры на всей поверхности, то разве на несколько сотых долей градуса Цельсия.

Температуры на поверхностях подшипников, конечно, могут отличаться от температур на поверхности цапфы; но если примем во внимание, что слой масла, отделяющий эти поверхности одну от другой, обыкновенно значительно меньше 0.01 мм, то едва ли можно допустить сколько-нибудь ощутительную разницу температур на поверхностях цапфы и подшипников. Следовательно, если бы удалось измерить температуру около поверхности одного из подшипников, то можно было бы надеяться на достаточно точное определение температуры слоя. Расстояние ближайших точек слоя от середины шарика A не менее 15 мм; следовательно, средняя температура слоя, нагревающего скобу, будет выше температуры шарика A. Определить различие этих температур вследствие сложности форм подшипника и скобы чрезвычайно трудно; но можно сказать, что отличие T, температуры шарика A, от средней температуры слоя t будет тем больше, чем больше будет отличаться T от температуры T_1 в окружающей атмосфере. Чтобы составить себе представление о различии между t и T, в скобе был помещен шарик другого термометра A, как показано на фиг. 4, 5 и 6. Фиг. 6 представляет вид верхней части скобы сверху. Одновременное наблюдение показаний термометров A и A' показало, что разницы их температур составляют почти



Фиг. 6

$$0.1\,(T - T_1),$$

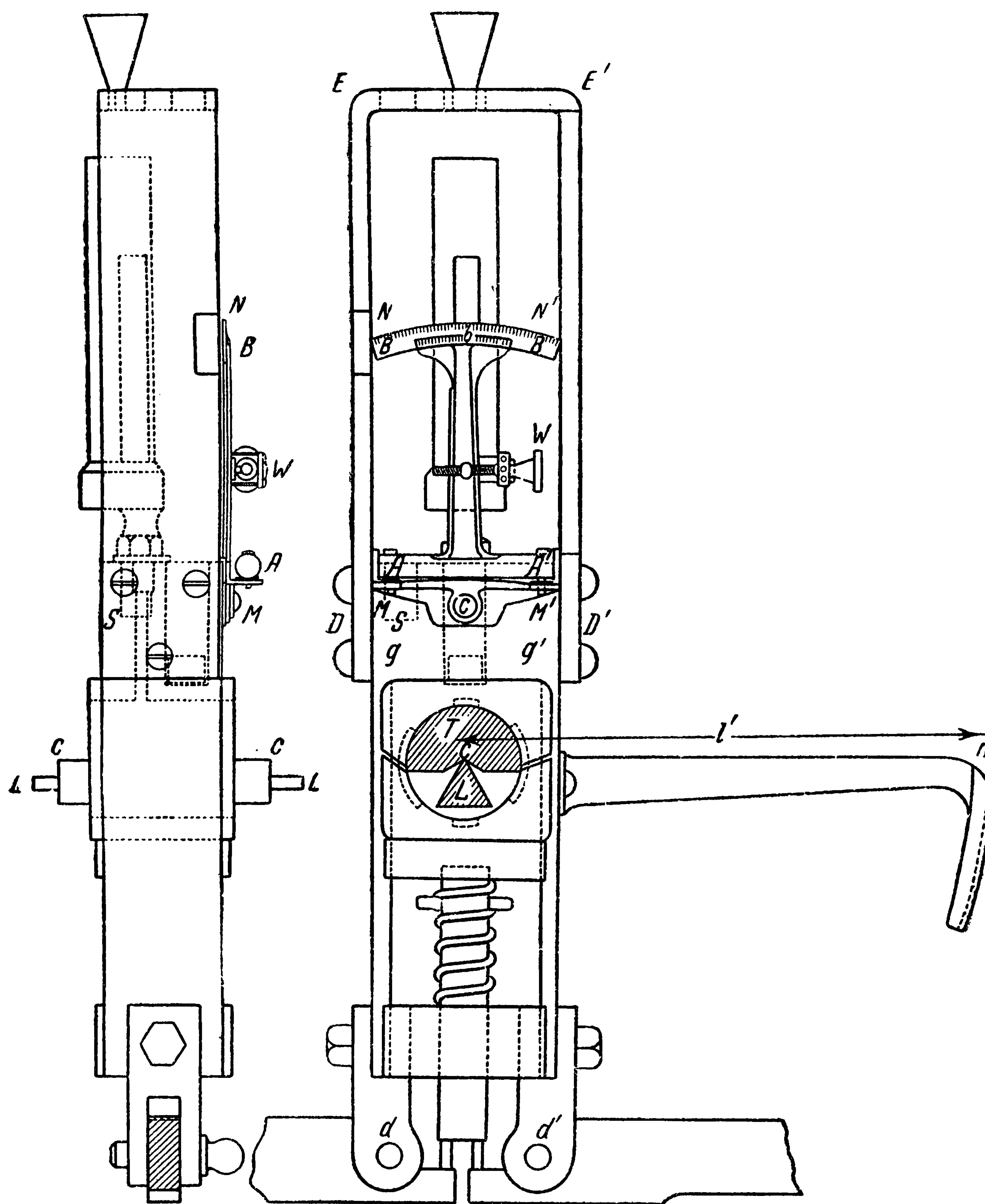
а так как шарик термометра A гораздо ближе к слою, чем к шарику A', то было принято, что

$$t = 0.05\,T\,(T - T_1). \qquad (4)$$

Смазывающая жидкость наливалась в стакан C (фиг. 2, 3 и 4). Внутри стакана помещена вертикальная трубка. Верхний конец ее несколько ниже верхнего края стакана; нижний конец трубки ввинчивается в скобу, как показано на фиг. 5. В самой скобе и в верхнем подшипнике сделаны отверстия, служащие продолжением внутреннего отверстия описанной трубки. Масло, налитое в стакан C выше верхнего края заключенной в нем трубки, течет по трубке в желобок верхнего подшипника b_1a_2 (фиг. 4) и, во время вращения цапфы увлекаемое ее поверхностью под подшипник, смазывает поверхности трения. При изобильном смазывании и при хорошем состоянии поверхностей b_1a_1, b_4a_4, b_3a_3 масло, увлекаемое цапфой из желобка b_1a_2, наполняет все три остальные желобка: a_1b_4, a_4b_3, a_3b_2. При менее удовлетворительном состоянии поверхностей трения масло заполняет желобок a_1b_4, куда оно попадает, пройдя только поверхность b_1a_1, но не заполняет желобка a_3b_2; а при состоянии трущихся поверхностей, еще менее удовлетворительном, не заполняется маслом и желобок a_1b_4.

Из приведенного описания прибора видно, что им можно определять давления, прижимающие подшипники к цапфе, величину поверхности трения, среднюю скорость, среднюю температуру смазывающего слоя и силу трения, проявляющуюся при всех этих обстоятельствах; но силу трения в некоторых случаях нельзя было измерять, не делая грубых ошибок, в 15 и даже в 50%.

Для более точных определений силы трения был приделан особый прибор для измерения углов отклонения скобы от ее отвесного положения. Форма самой скобы несколько изменена, чтобы приподнять ее центр тяжести и чтобы таким образом увеличить углы отклонения; с этой последней целью взамен скобы $dgg'd'$ была сделана новая (фиг. 7 и 8) с более короткими частями dg и $d'g'$; верхняя часть gg' новой скобы была сделана толще, чем у прежней, и сверх того к части gg' была привинчена железная скоба $D'EED'$. Все это вместе довольно значительно



Фиг. 7 и 8

уменьшило длину h. Фиг. 7 и 8 представляют новую скобу в четвертую часть натуральной величины. Устройство угломерного прибора видно тоже из фиг. 7 и 8.

Прибор состоит из пластинки $MNN'M'$, укрепленной наглухо на скобе gg', и из уровня AA', скрепленного с пластинкой CBB'. Уровень AA' с его пластинкой может вращаться около оси C, установленной параллельно с осью вращения цапфы b; на дугообразной пластинке NN' нанесены градусные деления из центра C, а на пластинке сделан нониус, позволяющий измерять углы отклонения с точностью до одной минуты, при навыке же и внимании — с точностью до 0.5 мин. Для вращения пластинки CBB' около оси C служит мелко нарезанный винт W.

Употребление угломерного прибора троякое: 1) он служит для определения отвесного положения скобы, 2) для определения силы трения, способной изменить угол отклонения скобы на одну минуту, и наконец, 3) им определялись полные углы отклонения скобы от отвесного положения в течение производства опытов с машиной.

Для определения отвесного положения скобы, надетой на горизонтальную цапфу b, был сделан полуцилиндр T, показанный на фиг. 8. Диаметр полуцилиндра T одинаков с диаметром цапфы b. Нижняя поверхность состоит из двух плоскостей, пересекающихся на оси полуцилиндра, и из двух других плоскостей, показанных на чертеже горизонтальными прямыми, лежащими несколько ниже точки C. Кроме полуцилиндра T, была изготовлена еще трехгранная призма LL, показанная на фиг. 7 и 8. Ребра призмы были сделаны насколько возможно прямыми и острыми.

Скоба $dgg'd'$ со всеми без исключения ее принадлежностями, рычагами, грузами, термометром, с маслом, налитым в ее стакан, с полуцилиндром T, зажатым между ее подшипниками точно так же, как зажимается между ними цапфа, навешивалась, как показано на фиг. 7 и 8, на горизонтально поставленное острое ребро CC призмы LL, укрепленной неподвижно в стан-

ке. В этих условиях скоба почти без всякого препятствия могла колебаться около линии CC, соответствующей оси вращения цапфы; следовательно, она могла принимать то самое отвесное положение, которое приняла бы, вися на цапфе b, если бы на поверхности этой цапфы не было вовсе трения. Когда цапфа приходила в спокойное состояние, винтом W приводили пузырек уровня AA' в среднее положение и замечали угол α_0', указываемый нониусом BB'. Затем, так как линия C могла недостаточно точно совпадать с истинной осью полуцилиндра, то, заметив угол α_0', переставляли полуцилиндр T так, чтобы конец его, бывший у передней стороны скобы, пришелся у задней, и, снова повесив скобу на ребро CC, давали возможность ей принять отвесное положение, приводили винтом W пузырек уровня AA' на середину и снова замечали угол α_0'', указываемый нониусом BB'. Угол α_0' и α_0'' различались на весьма малые величины.

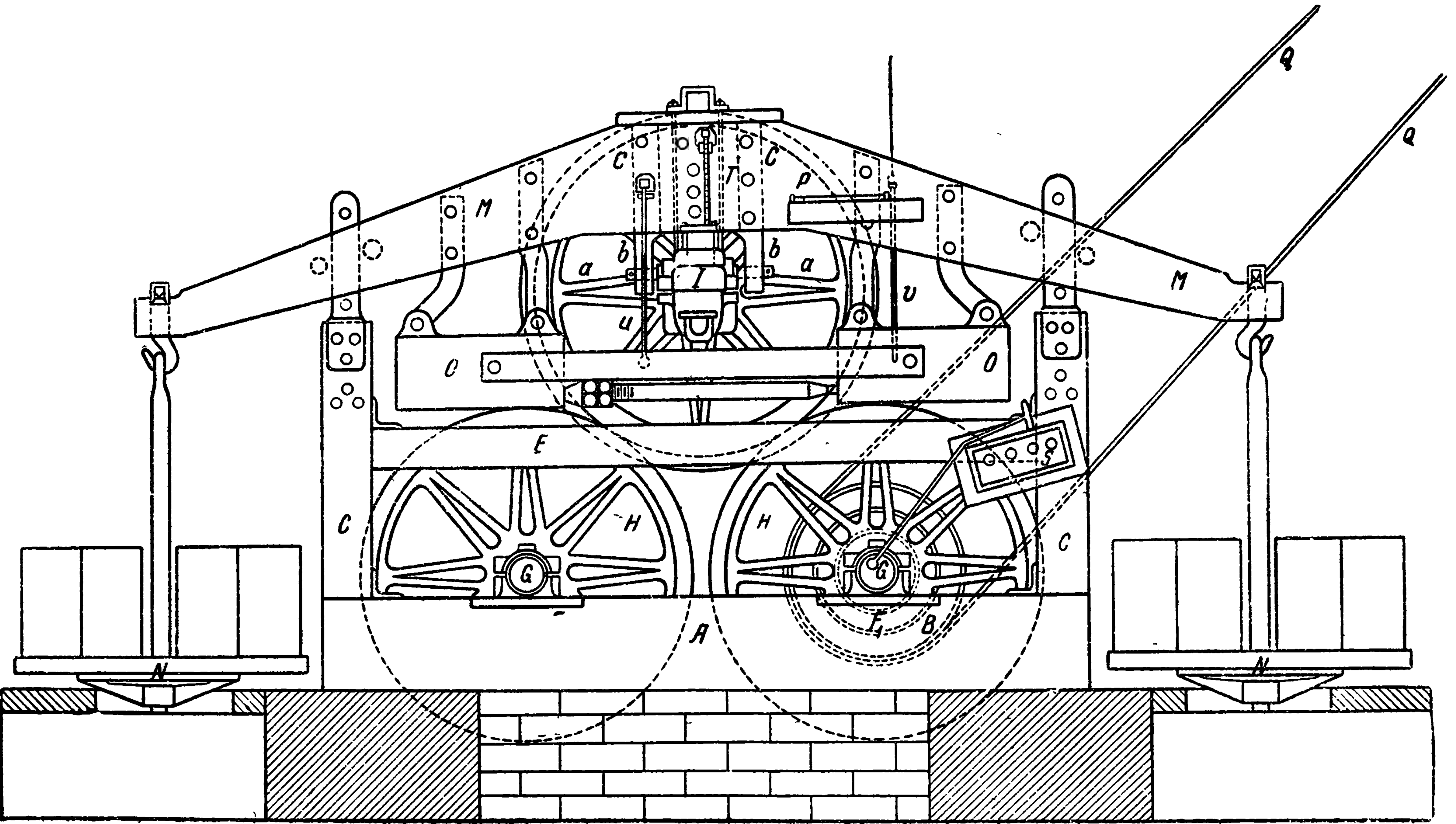
Среднюю арифметическую из этих двух показаний

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_0' + \alpha_0''}{2}$$

должен показывать нониус, если скоба, повешенная на цапфу b, придет в отвесное положение и если пузырек уровня AA' будет стоять на середине.

Величина угла α_0 имеет свое особое значение для прибора без грузов и для прибора с грузами при каждом положении грузов. Положение грузов p, p' на рычагах e, e' определялось особыми стержнями, не допускавшими ошибок в помещении груза и в 0.05 мм, так как в величине угла α_0, определявшегося по нескольку раз для одного и того же положения грузов, после снимания их с рычагов e, e' и нового надевания, различие не составляло и одной минуты.

Для определения силы трения, способной изменять угол отклонения скобы без грузов или с грузами p, p' на одну



Фиг. 9

минуту, оставляли скобу без грузов или с грузами висящей на призме LL, как выше описано, а к концу n рычага cn привешивали на тонкой шелковинке различные грузы. Грузы, подвешиваемые на шелковинке, выбирались такие, чтобы отклонения скобы ни в каком случае не выходили за те пределы, когда шелковинка переставала бы быть касательной к дуге круга, описанной из центра C и образующей дно желобка на крючке n. Когда скоба, отклоненная грузом Q, привешенным к шелковинке, приходила в равновесие, тогда винтом W приводили пузырек уровня на середину и замечали угол β', показываемый нониусом BB'. Затем, переставив полуцилиндр T так, чтобы передний его конец пришел назад, и оставив скобу с принадлежностями в прежнем виде, замечали новое указание угла β''. Углы β' и β'', подобно углам α_0' и α_0'', разнились очень мало. Таким образом определялось, что сила Q, действующая на плече l', отклоняет скобу от отвесного положения настолько, что при среднем положении пузырька нониус показывает угол

$$\beta = \frac{\beta' + \beta''}{2},$$

следовательно, момент Ql' отклоняет скобу от отвесного ее положения на угол

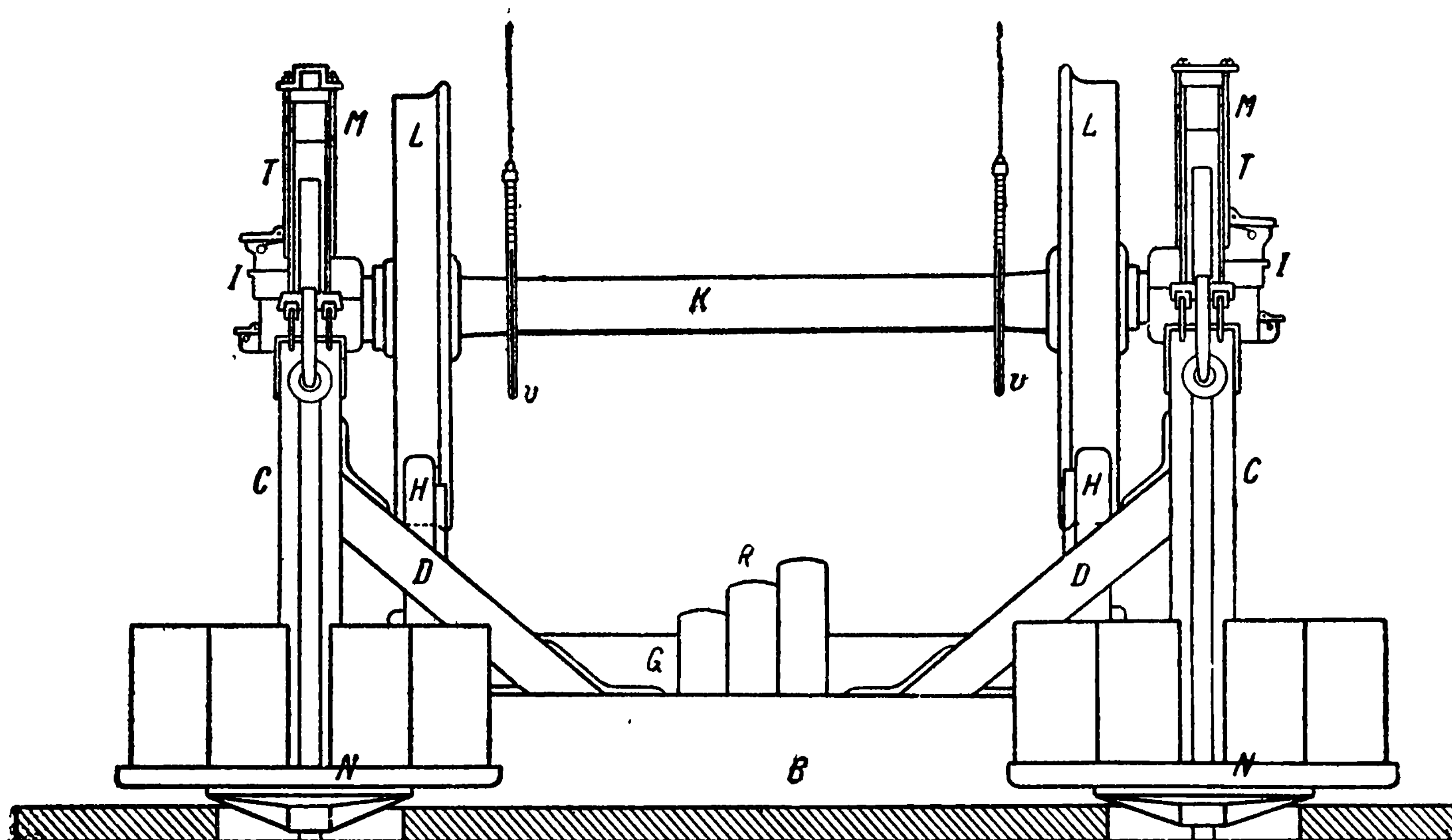
$$(\beta - \alpha_0) \text{ минут.}$$

Ясно, что сила F', приложенная на поверхности цапфы b, следовательно имеющая плечо $d/2$, способная отклонить скобу на угол в одну минуту, будет определена уравнением

$$F' = \frac{2}{\beta - \gamma_0} \cdot \frac{l'}{d} Q. \tag{5}$$

Сила F' была определяема для прибора с одними рычагами e, e' и с грузами p, p', особо для каждого из тех положений грузов, которые предполагалось иметь во время опытов.

Угол отклонения скобы от отвесного положения во время опытов над трением цапфы в подшипниках определялся весьма легко. Когда опыт идет хорошо, скоба принимает некоторое наклонное положение и в течение долгого времени нимало его не изменяет. При этом, имея навык, нетрудно поставить винтом W пузырек уровня в его среднее положение. Заметив при



Фиг. 10

этом угол γ, указываемый нониусом, найдем, что отклонение скобы от вертикального положения будет

$$\alpha = \gamma - \alpha_0, \tag{6}$$

а соединяя это последнее уравнение с уравнением (5), нетрудно найти, что сумма сил трения $F_1 + F_2$, отклонившая скобу на этот угол, определится из уравнения

$$F = F_1 + F_2 = (\lambda - \alpha_0) F'. \tag{7}$$

Этим уравнением и приходилось пользоваться при изучении ытов с переделанной машиной Клейн, Шанцлин и Беккер.

Машина для производства опытов с вагонной осью представлена в масштабе 0.04 в двух видах на фиг. 9 и 10. Фиг. 9 представляет вид спереди, а фиг. 10 — вид сбоку.

Машина состояла из деревянной четырехугольной рамы из двух взаимно параллельных брусьев A (фиг. 9) и двух других B (фиг. 10). В углах рамы стояли четыре деревянные стойки C, укрепленные раскосами D (фиг. 10) и связанные между собой спереди и сзади брусьями E. Вся рама стояла на кирпичном фундаменте.

На брусьях A было укреплено по два подшипника F, F_1 для двух взаимно параллельных вагонных осей G, G_1 (фиг. 9 и 10). Цапфы горизонтально лежавших и взаимно параллельных осей G, G_1 заключались в подшипниках F, F, F, F. На осях G, G_1 были надеты по паре вагонных колес H, H с шинами, обточенными по форме верхней части головки рельса. Наружные диаметры всех четырех колес были сделаны по возможности одной и той же меры.

Испытуемая вагонная ось K с ее парой обыкновенных, хорошо обточенных колес L, L (фиг. 10) ставилась на только что описанные колеса H, H, H, H. Каждое из колес L опиралось на два смежных колеса H; эти колеса H, H в отношении колес L представляли подвижные рельсы, по которым колеса L могли катиться, оставаясь всегда на одном и том же месте перед глазами наблюдателя.

При правильном положении осей G, G и при хорошей обточке всех колес H и L ось K имеет положение, весьма близкое к горизонтальному.

На цапфы оси L были надеты вагонные буксы l с их подшипниками.

Нагрузка оси производилась почти так же, как и в вагонах, с той лишь разницей, что на буксе, на место рессоры, было положено равноплечное коромысло MM. На каждой цапфе оси K было по коромыслу. Каждое коромысло состояло из двух листов котельного железа. Для неподвижного укрепления коромысла

M с поддерживающей его буксой I между листами коромысла, около его середины, были закреплены железные части bc, bc (фиг. 9). В нижних концах этих частей были сделаны круглые горизонтальные отверстия с винтовой резьбой внутри них. Через отверстия проходили болты a, a. Концы этих болтов упирались в буксу. Этими болтами можно передвигать коромысло по буксе, изменяя расстояния от середины буксы до концов коромысла. На концах коромысел, на острых стальных призмах, висели чашки N, N для грузов. У каждого коромысла M были свои грузы O, O (фиг. 9), связанные с коромыслом и между собой неизменным образом и предназначенные для того, чтобы центр тяжести коромысла со всеми его принадлежностями и с прикрепленной к нему буксой лежал под геометрической осью вращения оси K и чтобы расстояние центра тяжести от оси можно было сделать по возможности малым.

Уравновешенное коромысло, при отсутствии трения на цапфе, занимает совершенно определенное положение, которое можно назвать горизонтальным. Положение это должно быть найдено опытами, а для определения, занимает ли коромысло это положение в данный момент или оно отклоняется в ту или в другую сторону, на коромысле был укреплен уровень P.

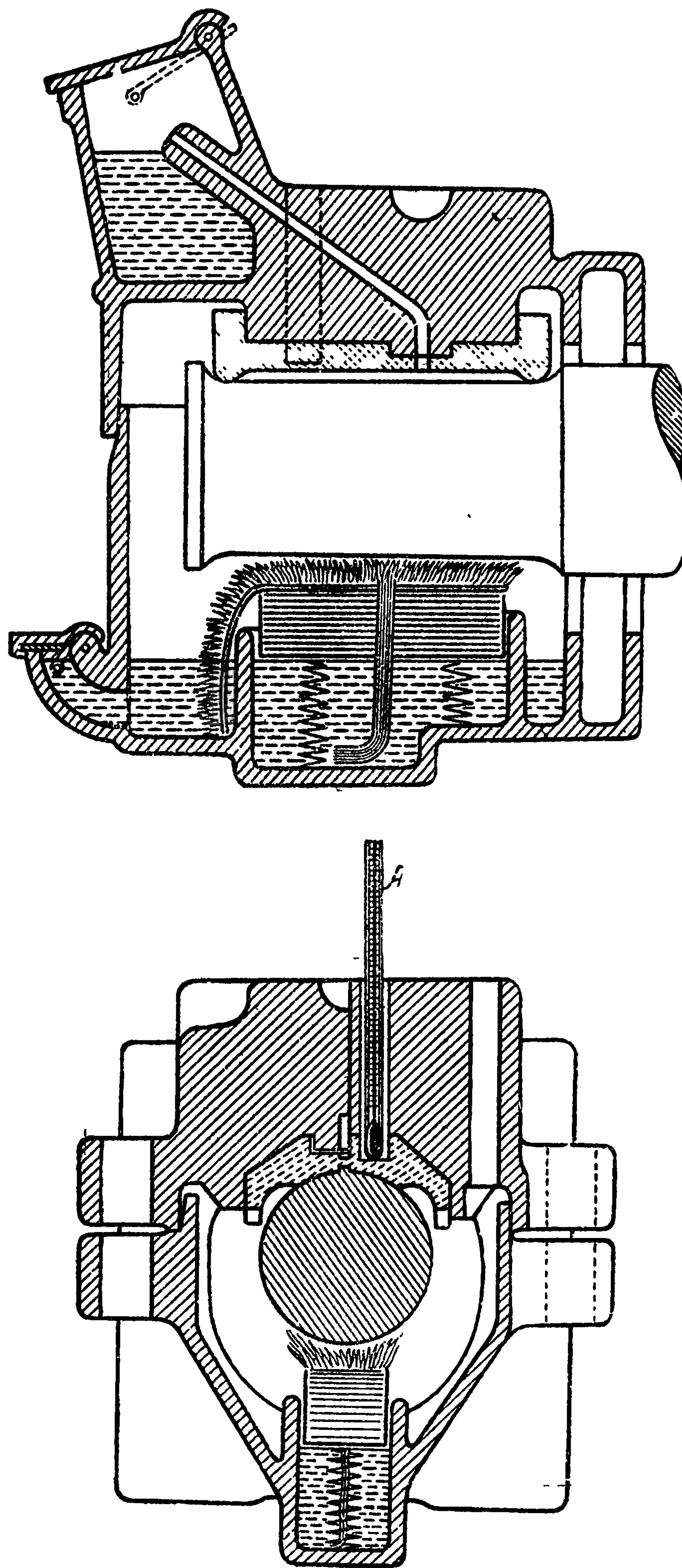
Вращение оси K производилось паровой машиной, приводившей в движение ремень QQ (фиг. 9), обхватывавший ступенчатый шкив R. Этот шкив был укреплен на оси G_1. Вращение колес, сидевших на оси G_1, вызывало вращение колес LL и оси K с ее цапфами.

Число оборотов оси G определялось счетчиком S. Температура подшипника определялась термометром T (фиг. 9 и 10). Шарики этих термометров помещались в углублениях, сделанных в телах подшипников, как видно из фиг. 12. Эти термометры указывали, очевидно, среднюю температуру той части подшипника, которая окружала термометр, а вовсе не температуру смазывающего слоя. Различие между температурой термометра и средней температурой слоя может быть величиной довольно

чувствительной и во всяком случае зависит от места, избранного в подшипнике для термометра. Насколько необходимо обращать внимание на положение термометра в подшипнике, чтобы заключения из опытов были правильны, это могут показать только опыты, сделанные при разных положениях термометра в подшипнике. Поэтому в подшипниках было сделано по два углубления, как показывает фиг. 15, представляющая разрез подшипника в половину натуральной величины.

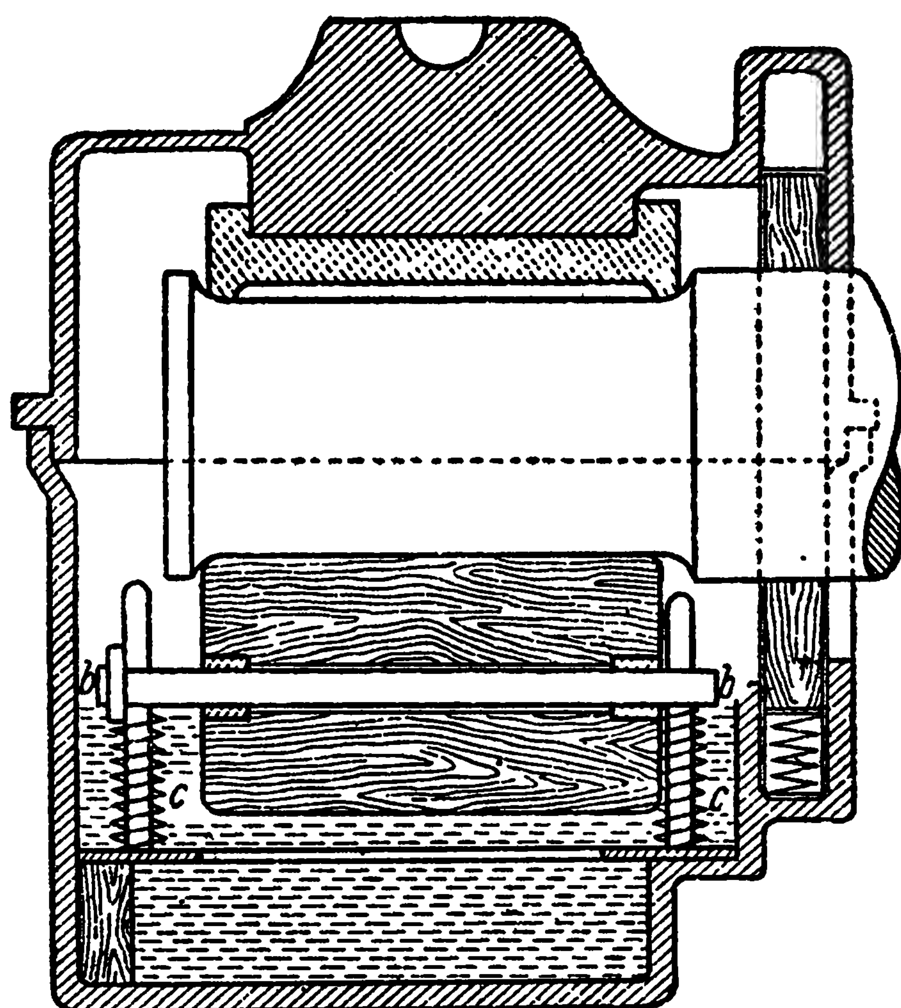
Наружная температура определялась термометрами ρ и ρ (фиг. 9 и 10).

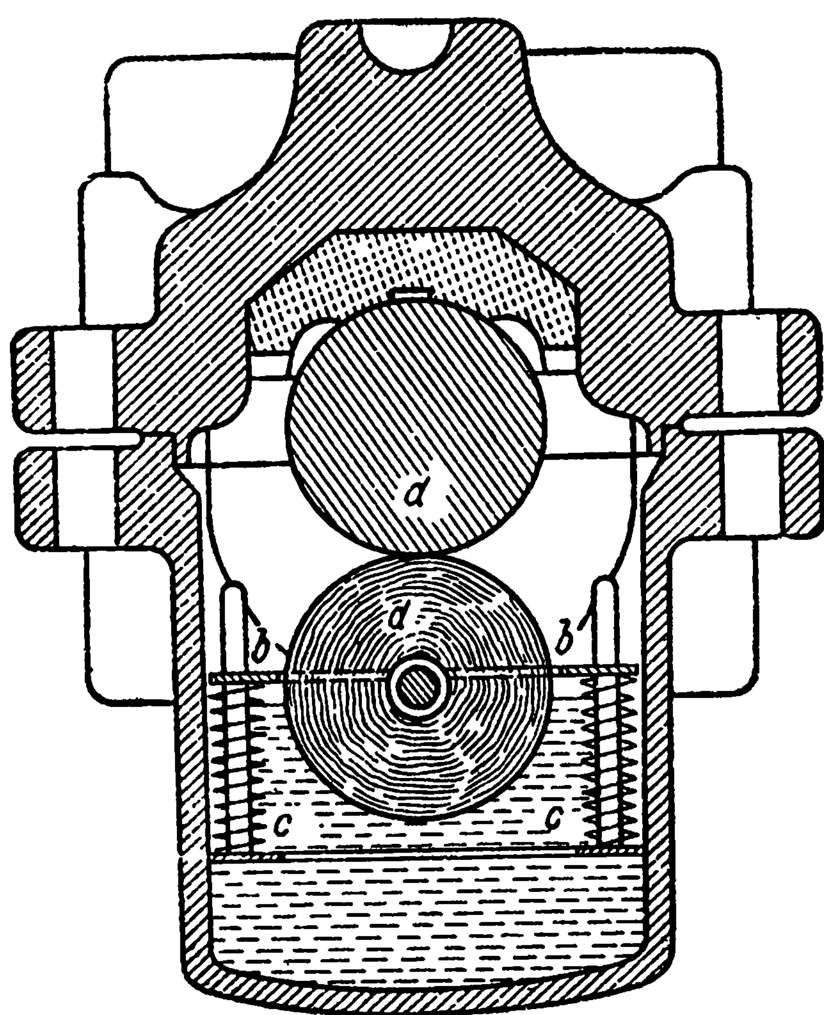
Буксы, употреблявшиеся при опытах, представлены на фиг. 11 и 12 и на фиг. 13 и 14 в 0.2 натуральной величины. Эти фигуры представляют продольные и поперечные разрезы букс.



Фиг. 11 и 12

В буксе, изображенной на фиг. 11 и 12, смазка протекала сверху по фитилю или без фитиля, а снизу смазка подводилась





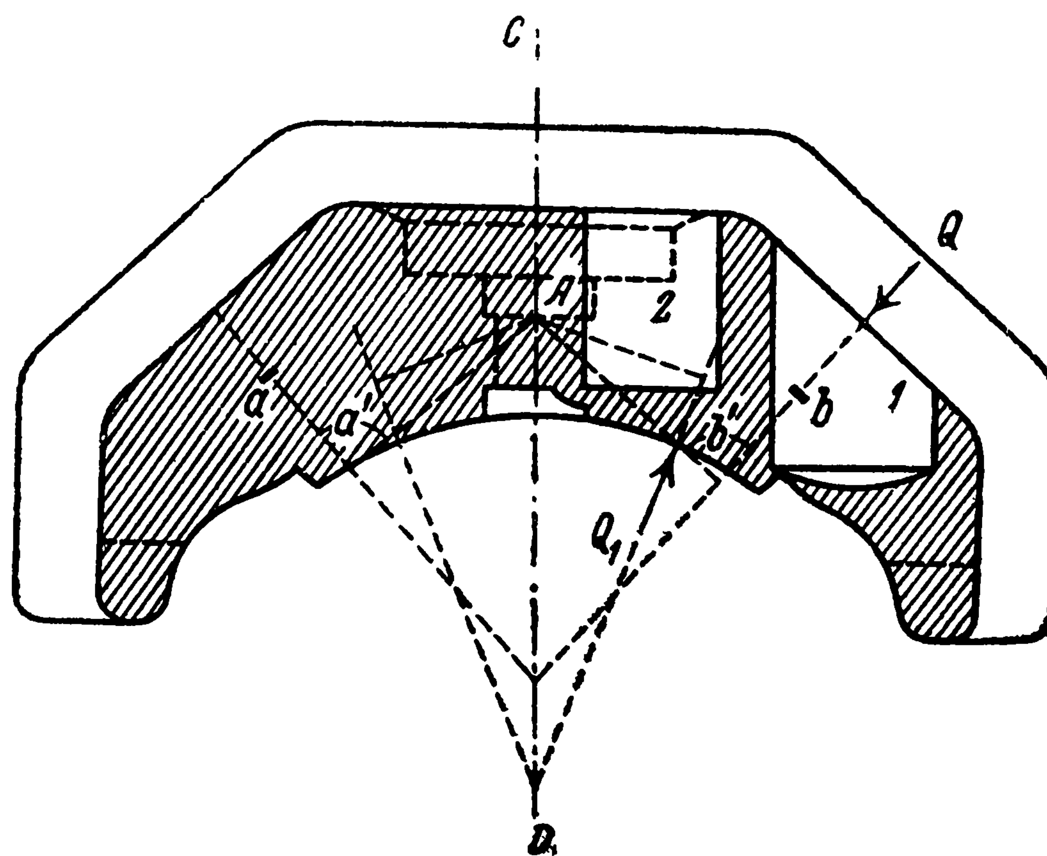
Фиг. 13 и 14

щеткой, нижняя часть которой погружалась в смазывающую жидкость.

В буксе, представленной на фиг. 13 и 14, сверху смазка совсем не подводилась, а для доставления жидкости к цапфе помещался в буксе деревянный цилиндр *a*. В нижнюю часть буксы наливалась смазывающая жидкость в таком количестве, что ее уровень приходился почти на одной высоте с осью цилиндра *a*. Концы оси этого цилиндра помещались в перекладинах *b*, *b*, подпиравшихся снизу спиральными пружинами *c*, *c*. Эти пружины всегда прижимали верхнюю производящую цилиндра *a* к нижней производящей цапфы.

Подшипники, употребленные при опытах, представлены на фиг. 15 и 16. Фиг. 15 представляет разрез плоскостью, перпендикулярной к

оси, проведенной через углубления, сделанные в подшипнике, для термометрических шариков. Фиг. 16 представляет продольный разрез подшипника. На середине фигуры виден канал, по которому смазывающая жидкость притекала сверху в желобок подшипника. Обе фигуры сделаны в половину натуральной величины.



Фиг. 15

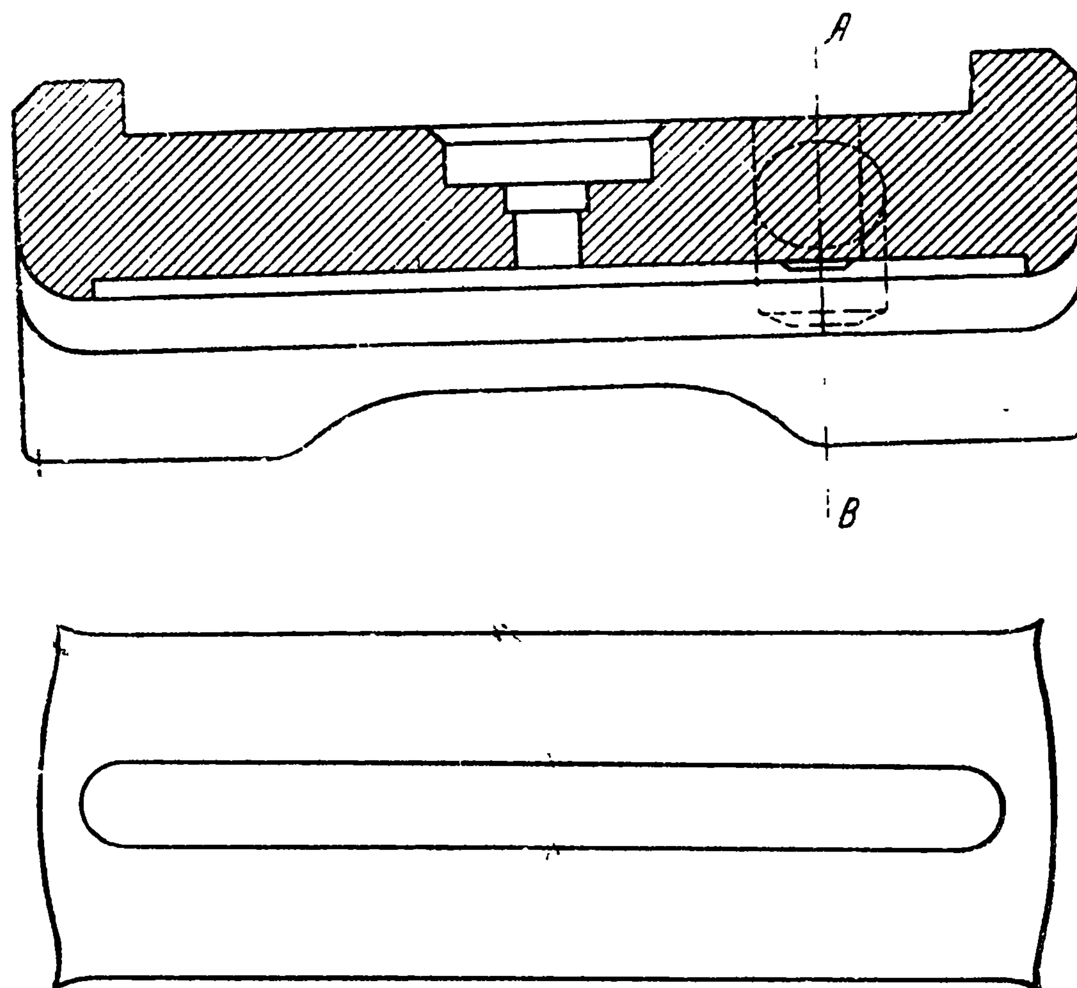
Один подшипник был весь бронзовый, а другой был тоже из бронзы, но часть, образовывавшая поверхность трения, была из баббита, приготовленного так же, как выше было сказано.

Фиг. 17 представляет очертание трущейся поверхности.

Форма трущейся поверхности подшипника во всех опытах была одна и та же. Это была часть цилиндрической поверхности, разъединенная в верхней ее части желобком, простиравшимся почти во всю длину подшипника и не доходившим до краев его только на несколько миллиметров. Продольные края поверхности у желобка и наружные края поверхности трения были направлены по прямым производящим цилиндрической поверхности. У концов подшипника поверхность трения переходила в кольцевую и ограничивалась линиями, приближавшимися к кругам.

Величина поверхности трения подшипников была иногда и несколько уже, чем на приведенном чертеже (фиг. 17).

Размеры поверхности трения обусловливались двумя соображениями: желательно было, чтобы полная поверхность трения немного отличалась от обыкновенно принятой в вагонах и чтобы изменения кривизны этой поверхности, происходящие



Фиг. 16 и 17

от изменения температуры, как можно меньше влияли на среднюю толщину слоя. Это последнее требование тем лучше выполняется, чем уже поверхность трения. Поэтому дуга окружности цапфы, находившаяся под подшипником, была не больше 53.6 мм, что при радиусе цапфы в 42.4 мм соответствует углу в 72°15′ и что составляет менее 0.7 соответствующего угла в подшипниках, бывших в вышеописанной машине Клейн, Шанцлин и Беккер.

Цель производства опытов с этой машиной была прежде всего чисто практическая: было желательно найти по возможности близко величины сил трения, развивавшихся на вагонных

осях при употреблении различных масел, при обстоятельствах по возможности близких к тем, которые бывают в обыкновенных условиях движения вагонных осей; притом практические техники весьма желали в то же время ознакомиться с влиянием температуры окружающего воздуха на величину силы трения, развивающуюся на вагонных шейках. Но во время подготовления машины к опытам представлялась уже возможность применения вышеописанного графического способа определения относительного достоинства смазывающей способности различных жидкостей, поэтому желательно было воспользоваться и этими опытами, чтобы проверить указанный способ сравнения масел. Поверка этого способа на описанном станке с вагонной осью представлялась тем более необходимою, что число опытов с большими давлениями на единицу поверхности трения, сделанных при посредстве машины Клейн, Шанцлин и Беккер, было весьма ограничено; а при неизбежности погрешностей в наблюдениях можно было надеяться уловить истинный характер явления только при таком большом числе наблюдений, которое можно было произвести с вагонной осью в описываемой теперь машине.

Кроме того, надо сказать, что поверка предлагаемого графического способа была необходима и потому, что этот способ, может быть и вполне правильный и совершенно хорошо применимый при отличном состоянии цапфы и подшипника, будет неприменим в тех условиях, в которых находятся обыкновенные цапфы и подшипники.

Сверх этих главных целей, были и другие, второстепенные, но тем не менее весьма интересные для техников. Так, предполагалось разъяснить влияние на силу трения таких обстоятельств, как способ подведения смазки к смазываемой поверхности, количество притекающей смазки, рода металла, из которого сделан подшипник, и величины поверхности трения подшипника.

Производство опытов было организовано так, чтобы наблюдения производились при обстоятельствах вполне установившегося движения, при возможном постоянстве температур в

подшипнике и в атмосфере; влияние изменений кривизны поверхности, происходящих от изменения температуры подшипника и оси, устранялось по возможности; поверхности трения сохранялись настолько однообразными, насколько этого можно достигать при непрерывном изнашивании не только подшипников, но и осей.

Для устранения изменения кривизны поверхностей трения, происходящих от изменения нагрузок, подшипники притирались при некоторой нагрузке, и затем эта нагрузка уже не менялась в течение всего ряда наблюдений, предполагавшихся с этой нагрузкой.

Влияние температуры на кривизну, вполне исчезающее при совершенно плоских поверхностях трения, уменьшалось тем, что угол обхвата подшипником оси был уменьшен до возможной степени. Этот угол составлял, как уже сказано, не более 72°15′. Однообразие условий, относящихся к состоянию поверхностей трения, достигалось так же, как и при вышеописанных опытах с переделанной машиной Клейн, Шанцлин и Беккер, тем, что масла испытывались одно за другим, и в конце ряда наблюдений производился опыт с первым из испытанных масел, чтобы этим опытом определить, достаточно ли сохранилось влияние поверхности, и для большей достоверности результатов такие ряды наблюдений повторялись по нескольку раз.

Опыт обыкновенно начинался с утра и продолжался без перерыва до вечера, в течение 8 или 9 час. Установившиеся условия движения держались при таких опытах целыми часами.

Во время опыта, при конце каждой 1000 или 2000 оборотов, записывались: 1) время, 2) температуры в подшипниках, 3) температуры внешней атмосферы. При установившихся условиях движения, когда температура переставала заметно изменяться, на чашку, подвешенную к коромыслу и поднимавшуюся вверх под влиянием сил трения на цапфе, накладывались грузы, приводившие коромысло в горизонтальное положение.

Несмотря на обточку колес, повидимому довольно хорошую, ось K вращалась с некоторыми сотрясениями, и коромысло не всегда оставалось без колебаний; нередко оно подвергалось хотя и медленным, но непрерывным колебаниям. Эти колебания, однако, были всегда такого рода, что наблюдение уровня, прикрепленного к коромыслу, при небольшом даже навыке не представляло почти никаких затруднений и при полном грузе, поддерживаемом цапфой в 3 400 000 г; избыток или недостаток груза в 10 г, нужного для уравновешения силы трения, можно было наблюдать с полной уверенностью; но так как наблюдения с этой степенью точности требовали очень много времени, то обыкновенно ограничивались определением грузов с точностью до 25 г, которые составляли в большинстве случаев менее 6% всего груза, уравновешивающего силу трения.

Отношение числа оборотов оси K к числу оборотов оси G_1 было наблюдаемо многократно, и всегда оказывалось одно и то же — с точностью до 0.5%.

Весь ход одного опыта со всеми происходившими при этом наблюдениями представляет таблица, приведенная на страницах 356 и 357 .

Приведенная таблица относится к таким двум опытам, при которых вращение оси в ту и в другую сторону происходит при обстоятельствах почти совсем одинаковых. Внешние температуры почти не различаются, различие скоростей так мало, что не может оказывать влияния на силу трения, нагрузки — одни и те же. Если при таких опытах центр тяжести коромысла не перемещается относительно геометрической оси цапфы, то нет ничего проще и легче, как определить силу трения, развивавшуюся во время этих опытов на цапфе, принимая в расчет длины плеч коромысла, диаметр цапфы и величины нагрузок. Но по местным условиям огромное большинство опытов происходило при обстоятельствах, не совсем похожих на только что приведенные. Выше было уже сказано, что для правильного сравнения масел надо по возможности устранить влияние

изменений в поверхностях трения, и что для устранения этого влияния масла испытывались поочередно одно за другим, при одном и том же направлении вращения. Поэтому обратный ход получала ось после нескольких дней вращения в одном и том же направлении.

Нагрузки и скорости при этих вращениях можно было сохранять или изменять по произволу, но температуры воздуха

Таблица опытов 21 мая с черным вагонным мас

Букса фиг. 11 и 12; подшипники бронзовые; поверхности трения: правого

Среднее давление на единицу поверхности трения:

Ход прямой

Время	Число тысяч, указываемое счетчиком	Скорость на поверхности цапфы, мм/сек	Правая цапфа			Левая цапфа		
			температуры		груз, уравновешивающий силу трения, г	температуры		груз, уравновешивающий силу трения, г
			внешняя	в подшипнике		внешняя	в подшипнике	
$10^h4'23''$	1	907	14.8	38.0	+431	14.9	38.0	—692
13 48	3	907	14.9	38.5		14.6	38.5	
23 17	5	900	15.1	38 1	+405	15.1	38.8	—692
32 43	7	905	14.5	38.0		14.5	39.5	
42 22	9	885	14 2	38.7		13.7	39.2	
51 59	11	888	15.2	39.3	+456	14.9	39.3	
11 1 32	13	894	15.0	39.7		14.7	39.5	—769
11 5	15	894	14.8	39.7	+456	14.7	39.7	
20 22	17	920	14.7	39.9		14.6	39.9	—642
29 52	19	899	14.9	39.9	+456	14.9	39.8	
39 17	21	907	15.0	39.9		14.8	39.8	—819
48 43	23	907	15.0	39.9	+456	14.8	39.9	
58 6	25	910	15.1	40.0		15.0	39.9	—819
12 7 36	27	899	15.1	40.0	+456	15.0	40.0	
16 58	29	911	15.4	40.0		15.2	40.1	—819
26 24	31	907	15.8	40.1	+456	15.6	40.1	
36 3	33	892	15.9	40.1		15.8	40.0	

и вообще предметов, окружающих машину, нельзя было устанавливать по желанию наблюдателя. Вся машина помещалась в довольно легкой постройке, не имевшей никаких приспособлений для отопления или для поддержания температуры данной величины, поэтому внешние температуры сравниваемых опытов бывали нередко довольно различны. Эти различия обусловливали различия температур в подшипниках, и, таким

лом (Рагозина № 2), образец № 74 или № 9

6000 мм², левого 5900 мм². Нагрузки цапф: правой 3420 кг, левой 3410 кг. на правой цапфе 62, на левой цапфе 63 атм.

Ход обратный

Время	Число тысяч, указываемое счетчиком	скорость на поверхности цапфы, мм/сек	Правая цапфа			левая цапфа		
			температуры		груз, уравновешивающий силу трения, г	температуры		груз, уравновешивающий силу трения, г
			внешняя	в подшипнике		внешняя	в подшипнике	
$2^h\ 17'\ 44''$	1	907	16·0	38.6	+679	15.6	40.8	
27 10	3	907	16.0	40.5		15.8	40.9	+1794
36 30	5	914	15.9	40·4	+679	15.7	40.8	
46 5	7	991	16.4	40.5		16.0	40·6	+1794
55 23	9	918	16.2	40.4	+679	16.2	40.7	
3 4 50	11	903	16.5	40,5		16.2	40.7	+1833
14 17	13	903	15.7	40.9	+679	15.6	40.5	
23 42	15	906	15.7	41.0		15,7	40.5	+1833
32 53	17	931	16.5	41.1	+679	16·5	40.6	
42 14	19	913	16.5	41.2		16.7	40.5	+1833
51 35	21	913	16·1	41.4	+679	16,7	40.6	
4 0 55	23	915	16.4	41.6		16.8	40.5	+1833
10 23	25	902	16.4	42.0	+705	16.8	40.5	
19 28	27	939	16.7	42.8		17.1	40.7	+1846
28 54	29	907	17.3	42.4	+705	17.3	40.5	
38 24	31	899	17.0	42.5	•	17.2	40.4	+1852
47 50	33	899	17.7	42.5	+705	17.9	40.4	

образом, при одних и тех же нагрузках и скоростях, силы трения при прямом ходе могли весьма чувствительно отличаться от сил трения при обратном ходе. В таких условиях силы трения не определяются одними теми данными, которые могут быть взяты из таблиц, подобных вышеприведенной; тем не менее вопрос разрешается вполне при некоторых дополнительных соображениях, к указанию которых тотчас же и приступим.

Обозначим

F — силу трения на цапфе,
d — диаметр цапфы,
L — длину плеча коромысла,
p — груз, положенный на чашку коромысла и уравновешивающий его,
M— момент груза, поддерживаемого цапфой, относительно геометрической оси цапфы.

В таком случае можно написать, что

$$Fd=2Lp+2M.$$

Обозначая еще

Δ — теплопроводность прибора,
t' — температуру в подшипнике,
t'_0 — температуру в окружающей атмосфере,
$t=t'-t'_0$ — разность температур в подшипнике и в окружающей атмосфере,
v — скорость на окружности цапфы,
E — 425 кг-м — механический эквивалент тепла,
можем написать другое уравнение

$$Fv=425\Delta t.$$

При обратном вращении цапфы величины d, L, M и E остаются без изменения, а остальные величины могут измениться. Для обозначения их оставим только что приведенные буквы,

но прибавим к ним значки. Таким образом, при обратном ходе, найдем два следующих уравнения:

$$F_1 d = 2Lp_1 - 2M$$

и

$$F_1 v_1 = 425\Delta_1 t_1.$$

Эти два уравнения вместе с двумя предыдущими доставляют

$$F = \frac{\Delta t v_1}{\Delta t v_1 + \Delta_1 t_1 v} \frac{2L}{d} (p + p_1)$$

и

$$F_1 = \frac{\Delta_1 t_1 v}{\Delta t v_1 + \Delta_1 t_1 v} \frac{2L}{d} (p + p_1).$$

Таким образом, можно определить силу трения для каждого опыта, и если бы в наших наблюдениях не было никаких ошибок, то определение силы трения для какого-нибудь опыта из сопоставления его с каким-нибудь другим или с каким-нибудь третьим, четвертым и т. д. должно доставить всегда одну и ту же величину. В случае ошибочности наблюдений на место одной величины F получится столько различных F', F'', F''', сколько было взято опытов для составления пары с первым избранным опытом. Относительно каждой из этих частных величин определяемой силы трения можно с одинаковой вероятностью говорить, что она больше и что она меньше истинной, а потому более вероятно, что средняя арифметическая этих отдельных значений представит истинную величину лучше, чем каждая из них в отдельности. Неизбежность ошибок зависит не только от того, что нельзя безошибочно определять величины p, p_1, v, v_1, Δ, Δ_1 t и t_1, но еще и от того, что положение центра тяжести коромысла относительно геометрической оси машины меняется довольно чувствительно от разных обстоятельств.

Малейшие движения болтов *aa* (фиг. 9), происходящие от сотрясения коромысла, или небольшие разницы средних

температур плеч коромысла могут переместить центр тяжести коромысла на 0.01, 0.02 мм, а может быть и более. Как ни малы абсолютные величины этих перемещений общего центра тяжести, но они достаточны, чтобы при полной силе трения в 10 кг вызвать ошибку в ее определении в 8, 16% и более.

Поэтому нужно определение величины F из нескольких групп уравнений, подобных двум последним. Но очевидно, что сопоставление каждого опыта с несколькими другими требует очень много времени и труда. Изменение способа решения представляется поэтому весьма желательным. Дело становится несравненно проще, если из большого числа наблюдений будет определено значение теплопроводности Δ. Если окажется возможность определять величину теплопроводности для данной разности температур в подшипнике и в атмосфере, то сила трения прямо определится из уравнения

$$F = \frac{425\Delta t}{v}$$

и сопоставление многих уравнений сделается ненужным. При хорошо определенной теплопроводности ошибки определения силы трения F уже будут зависеть только от ошибок определения разности температур подшипника и атмосферы t, и от ошибки определения скорости v.

Этот последний способ определения сил трения для отдельных опытов, как более простой и надежный, и был постоянно применяем.

ТРЕНИЕ В МАШИНАХ

§ 1. *Существующие теории трения в машинах и их недостатки*

Все части машин во время работы обычно хорошо смазаны. Поэтому здесь будет рассматриваться вопрос о трении лишь хорошо смазанных твердых тел.

До 1882 г. инженеры и физики не отмечали существенной разницы между трением хорошо смазанных твердых тел и трением несмазанных твердых тел. Обычно предполагалось, что законы Кулона и Морена одинаково приложимы к тому и другому роду трения. Думали, что коэффициент трения не зависит ни от скорости относительного движения работающих тел, ни от нагрузки, которая прижимает одно тело к другому, хотя Гирн и Терстон показали, что законы Кулона не приложимы к трению хорошо смазанных твердых тел, что скорость и нагрузка не остаются без влияния на коэффициент трения и что влияние этих величин иногда может быть чрезвычайно велико. Чтобы показать это влияние, достаточно указать на величины коэффициентов трения, найденных для спермацетового масла Гирном и Терстоном: Гирн дает число 0.5083, а Терстон —0.0019; первое в 267 раз больше второго. Соотношение, существующее между величинами, которые определяют силу трения хорошо смазанных твердых тел и самой этой силою, недостаточно просто для того, чтобы можно было определить прямо, путем опытов, без специальных изысканий. Такое состояние вопроса

заставило меня отказаться от имеющихся взглядов и привело меня к идее, что в машинах твердые части отделены одна от другой слоем жидкости, что трение хорошо смазанных тел есть результат прилипания слоя жидкости к каждому из двух тел, которые она смазывает, что в результате этого прилипания часть жидкости, связанная с одним из твердых тел, скользит по другой части жидкости, связанной с другим твердым телом, и что это скольжение одного слоя жидкости по другому сопровождается точно таким же трением, как то, которое рассматривается как трение смазанных твердых тел.

Остановившись на этой точке зрения, нам приходится рассматривать трение хорошо смазанных твердых тел как гидродинамическую задачу. Первая попытка решения этой гидродинамической задачи была опубликована мною в 1883 г. Чтобы упростить решение, было предположено, что поверхности твердых тел, прилегающие к жидкому слою, суть круглые цилиндры и что движение жидкости смазочного слоя сделалось перманентным. К этим гипотезам, введенным для большего упрощения задачи, были добавлены и другие, вполне вероятные. Было допущено, что оси смазанных цилиндров совпадают, что, за исключением узких полос у краев подшипника, гидродинамическое давление во всех точках жидкого слоя имеет одинаковую величину, что можно пренебречь влиянием сил, пропорциональных массам частиц чрезвычайно тонкого слоя смазывающей жидкости и, наконец, что траектории частиц этого слоя суть круги, расположенные в плоскостях, перпендикулярных к оси цилиндров. Решение задачи, полученное при таких условиях, показало, что сила трения двух хорошо смазанных цилиндров выражается дробью, которая имеет в числителе произведение трех множителей: 1) внутреннее трение смазывающей жидкости, 2) относительная скорость движения одной смазанной поверхности по другой, 3) величина поверхности смазочного слоя, содержащегося между телами; знаменатель этой дроби представляет сумму трех величин: одна из них есть толщина смазочного слоя, две

другие суть линейные отношения внешних трений жидкости о цилиндрические поверхности соприкасающихся твердых тел к внутреннему трению жидкого слоя. Для разъяснения, до какой степени вышепринятые гипотезы могут влиять на определение силы трения в случаях, которые имеют место в машинах, я произвел опыты с двумя различными машинами. Эти опыты описаны в «Известиях Санкт-Петербургского технологического института» за 1886 г. Была произведена большая серия опытов с тремя органическими маслами: сурепным, оливковым и спермацетовым, а также с многочисленными минеральными маслами, чрезвычайно отличающимися друг от друга: от самых легких, как олеонид, и до самых тяжелых. При различных скоростях вращения оси, начиная с очень малой скорости на поверхности цапфы в 0.200 м/сек и до самой большой скорости в 2.200 м/сек на той же поверхности. Средние величины давления в смазывающем слое подшипника изменяются от 8 до 58 атм. В другой машине среднее давление достигало 92 атм. Эти опыты показали, что вышеприведенная дробь выражает силу трения удовлетворительным образом. Итальянский инженер Франческо Мази подтвердил найденную мною формулу.

Формула, выражающая силу трения, пополненная предположением, что толщину смазочного слоя можно рассматривать как независимую от свойств смазывающей жидкости, позволяет применять кривые линии для выражения зависимости внутреннего трения от температур жидкости и дает графический прием для решения большого числа вопросов относительно трения различных частей машин. Таким образом, можно построить таблицу, характеризующую соотношение между силами трения смазанных твердых тел, внутренними трениями смазывающих жидкостей, скоростями движения оси, давлениями подшипника на смазочный слой и температурами окружающего воздуха. Точность этой таблицы подтверждена большим количеством опытов. Этим графическим приемом разрешается чрезвычайно легко и чрезвычайно быстро ряд важных практических

вопросов, для которых раньше не было никаких способов решения.

Все то, что есть особенно полезного в моей теории, нисколько не отрицает некоторых указанных выше ее существенных недостатков, объясняемых наличием ряда предположений, принятых в целях упрощения гидродинамической проблемы. Эта теория не показывает влияния несовпадения осей смазанных цилиндрических поверхностей, а гипотеза, принятая в этой теории о постоянстве гидродинамического давления, совершенно не согласуется с результатами наблюдений Бошан — Тауера.

Эти два недостатка моей теории были избегнуты в теории, предложенной Осборном Рейнольдсом [1] *, который после меня пришел также к идее, что вопрос трения хорошо смазанных твердых тел есть область гидродинамики. Сравнение гидродинамических давлений, найденных наблюдениями Бошан — Тауера, с гидродинамическими давлениями, вычисленными на основании теории Рейнольдса, показывает, что гипотезы этой последней достаточно близки к тому, что существует в действительности.

Результаты сравнения сил трения, вычисленных по Рейнольдсу и найденных Тауером, не могут еще считаться окончательными потому, что в вычислениях Рейнольдса в одно из уравнений, необходимых для вычисления этой силы, вкралась ошибка. Ошибка, допущенная Рейнольдсом, может быть исправлена без больших затруднений, но дефект его теории, которого никак нельзя избегнуть, состоит в крайней сложности и в крайней трудности вычислений. Правильность этого замечания ясно обнаружится при дальнейшем изложении.

Другой дефект теории Рейнольдса состоит в том, что она не приложима в случаях, где расстояние между параллельными осями подшипника и цапфы превышает 0.6 разницы радиусов подшипника и цапфы. Наконец, теория Рейнольдса приложима только в случае, когда подшипник сконструирован, как в

---

* Ссылки в квадратных скобках указывают номер примечания (см. стр. 542—545). *(Ред.)*

опыте Бошан — Тауера, т. е. в случае, когда подшипник представляет часть цилиндрической поверхности, ограниченной двумя образующими; но ее нельзя приложить ни к моим опытам, ни к опытам Франческо Мази. В моих опытах цилиндрическая поверхность подшипника составлена из двух частей, ограниченных прямолинейными образующими; подшипник Франческо Мази представляет три отдельные части цилиндрической поверхности, и каждая из этих частей ограничена двумя прямолинейными образующими.

В числе дефектов двух последних теорий нельзя еще не упомянуть о важных замечаниях, сделанных Франческо Мази об отклонениях силы трения от указанного теориями закона пропорциональности скорости. Это разногласие еще не разъяснено вполне, и внимательная проверка опытов Мази позволяет предположить, что разногласие может происходить не от погрешностей самой теории, но от ошибочного применения ее, показывающего, что не были приняты во внимание изменения температуры смазочного слоя на протяжении опыта.

Две гидродинамические теории, пренебрегающие силами, пропорциональными массам, и скоростями, параллельными оси подшипника, и не дающие возможности объяснить образование смазывающего слоя той или другой толщины, не дают способа установить появление трения после начала движения оси и проследить его до момента, когда эта ось остановится. Несмотря на указанные недочеты гидродинамической теории, только именно ей принадлежит указание на некоторые элементы, имеющие самое существенное влияние на трение смазанных тел. В предыдущих опытах не уделялось никакого внимания этим факторам.

Между ними самыми значительными, как показали мои теоретические изыскания и мои опыты, являются следующие: внутреннее трение смазывающей жидкости и температура воздуха, окружающего тела во время работы. Отсутствие указаний относительно этих факторов в описании большого

количества проделанных опытов привело к самым противоречивым заключениям в отношении обсуждения результатов наблюдений; для более углубленного изучения вопроса о трении смазанных тел необходимо указать все эти факторы с самой большой точностью.

§ 2. *Величины, влияющие на трение хорошо смазанных твердых тел, и степень их влияния*

Теория, которую я предложил и которая подтверждена опытами моими и Франческо Мази, ясно показывает влияние относительной скорости движения смазанных тел и внутреннего трения смазывающей жидкости. Мои опыты также достаточным образом обнаружили влияние температуры окружающего воздуха. В теории Осборна Рейнольдса влияние этих величин представлено в той же форме, как и в моей. Влияние размеров смазываемой поверхности, которое фигурирует в трении с подшипником, несколько сложнее в теории Рейнольдса, чем в моей, но в основных чертах обе теории выражают это влияние одинаковым образом. Также одинаковым образом выражается влияние толщины смазочного слоя; но зависимость толщины смазочного слоя от давления представлена в обоих теориях различно. В моей теории эта зависимость выражена эмпирической формулой, найденной на основе опытов Гирна и других экспериментаторов. Эта формула показывает, что толщина смазочного слоя обратно пропорциональна квадратному корню из среднего давления жидкости на единицу поверхности трения. Зависимость, о которой идет речь, подтверждена как моими опытами, так и опытами Франческо Мази. По Рейнольдсу зависимость толщины слоя от давления определяется при помощи одного из уравнений, выражающих условия равновесия сил, приложенных к неподвижному подшипнику.

Влияние внешних трений жидкого слоя с поверхностями, которые он смазывает, указано в моей теории, но его совер-

шенно нет в теории Рейнольдса и оно до настоящего времени еще не обнаружено опытами.

Наконец, теория Осборна Рейнольдса совершенно ясно показывает влияние относительного положения осей подшипника и цапфы. Формулы, выражающие это влияние с помощью величин, определяющих относительное положение указанных осей, настолько сложны и так мало поддаются упрощениям, необходимым для ясного понимания изучаемого влияния, что единственный способ разъяснить вопрос состоит в одновременном применении теории и опытов. Осборн Рейнольдс попытался произвести это сравнение, но он допустил в своих вычислениях ошибки, совершенно уничтожившие пользу его труда. Таким образом, в гидродинамической теории трения остался такой значительный пробел, что мне кажется полезным его заполнить. Так как для сравнения результатов теории и моих опытов сначала необходимо найти формулы, приложимые в условиях опыта, то следует приступить к нахождению этих формул. Для вывода формул применяется весьма общий прием с целью сделать их приложимыми не только к моим опытам, но также и к опытам Франческо Мази. Предложенный способ легко приложим также для случаев, где число разделенных частей той и другой цилиндрической поверхности будет не только 3, но какое угодно, лишь бы каждая из цилиндрических частей была ограничена двумя прямолинейными образующими; этот прием также приложим в случае подшипника в форме сплошного кольца.

§ 3. Основные уравнения гидродинамической теории трения в хорошо смазанных частях машин

Гидродинамические уравнения несжимаемой жидкости с внутренним трением могут быть представлены в очень простой форме, если пренебречь силами, пропорциональными массам, равно как и силами инерции.

Обозначая через x, y, z прямоугольные координаты точки, через p — гидродинамическое давление в этой точке,

$$p_{xy},\ p_{xz}$$
$$p_{yx},\ p_{yz}$$
$$p_{zx},\ p_{zy}$$

силы трения, перпендикулярные к оси, обозначенной первой буквой индекса и параллельные оси, обозначенной второй буквой индекса, u, v, ω — проекции скорости на осях x, y, z, μ — коэффициент внутреннего трения жидкости, можно написать три группы следующих уравнений:

1) Группа, определяющая гидродинамическое давление в точке x, y, z:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right],\\
\frac{\partial p}{\partial y} &= \mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right],\\
\frac{\partial p}{\partial z} &= \mu\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

2) Группа, определяющая силы трения в той же точке:

$$\left.\begin{aligned}
p_{yz} = p_{zy} &= \mu\left[\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial \omega}{\partial y}\right],\\
p_{zx} = p_{xz} &= \mu\left[\frac{\partial \omega}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right],\\
p_{xy} = p_{yx} &= \mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

3) Условие несжимаемости жидкости, выраженное уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial z}=0. \qquad (3)$$

Прилагая эти уравнения к цилиндрическим поверхностям цапфы и подшипника, примем направление оси x параллель-

ным направлению относительного движения в какой-нибудь точке поверхности цапфы; направление оси y — по направлению радиуса, проведенного в рассматриваемую точку, и направление оси z — параллельным оси.

Примем для дальнейшего упрощения задачи, что скорость v, параллельная радиусу, крайне мала по сравнению со скоростями u и ω, что, следовательно, можно принять

$$v=0.$$

Изменения скоростей u и ω при заданном значении y для всех изменений x и z могут рассматриваться как чрезмерно малые, поэтому примем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}=0.$$

Изменения скоростей u и ω, вызываемые изменениями y, могут быть большими и поэтому производные u и ω по y в указанных уравнениях должны быть сохранены.

Эти гипотезы, принятые Осборном Рейнольдсом, совершенно эквивалентны сделанному в моей работе предположению, что смазочный слой разделяется на крайне тонкие слои, параллельные смазанным поверхностям, и что эти слои, не смешиваясь один с другим, скользят один по другому.

Ограничиваясь приближенным решением, которое можно получить при указанных выше предположениях, уравнения (1), (2) и (3) могут быть приведены к следующей форме

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x}&=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y}&=0, \\ \frac{\partial p}{\partial z}&=\mu\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}; \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} p_{yz}&=p_{zy}=\mu\frac{\partial\omega}{\partial y},\\ p_{zx}&=p_{xz}=0,\\ p_{xy}&=p_{yx}=\mu\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial z}=0.$$

Для определения величины гидродинамического давления и сил трения надо интегрировать уравнения (4) и (5). С этой целью надо определить условия, которые должны быть удовлетворены на границах жидкого слоя [2]. На поверхности цапфы, данной уравнением

$$y=0,$$

мы имеем

$$u=U_0,\qquad v=0,\qquad \omega=0,$$

а на поверхности подшипника, определенной условием

$$y=h,$$

мы имеем

$$u=U_1,\qquad \omega=0,\qquad v=U_1-U_1\frac{\partial h}{\partial x}.$$

Последнее из условий, относящихся к границам, состоит в том, что на некотором контуре, удовлетворяющем уравнению

$$f(x, y)=0,$$

где смазочный слой соприкасается с атмосферой, имеем

$$p=p_0,$$

и, таким образом, условия для краев суть

$$\left.\begin{aligned} &\text{для } y=0: && u=U_0, && v=0, && \omega=0,\\ &\text{для } y=h: && u=U_1, && v=U_1-U_1\frac{\partial h}{\partial x}, && \omega=0,\\ &\text{для } f(x, y)=0: && p=p_0. && && \end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Так как p не зависит от y, то интегрирование уравнений группы (4) в указанных пределах приводит к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(y-h)\,y+U_0\frac{h-y}{h}+U_1\frac{y}{h},\\ \omega&=\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial z}(y-h)\,y. \end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Первые производные вторых членов этих уравнений, перенесенные в соответствующие уравнения группы (5), приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} p_{yz}&=p_{zy}=\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}(2y-h),\\ p_{xy}&=p_{yx}=\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}(2y-h)+\mu\frac{U_1-U_0}{h}. \end{aligned}\qquad(8)$$

Если p считать независимым от z, то четыре последних уравнения сокращаются до двух: первое из группы (7) и второе из группы (8).

Взяв производные от первого из этих уравнений по x и от второго по z и подставляя это в уравнение (3), находим, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{2\mu}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial p}{\partial x}(y-h)\,y\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial p}{\partial z}(y-h)\,h\right]-\right.\\ \left.-\frac{\partial}{\partial x}\left\{U_0\frac{h-y}{h}+U_1\frac{y}{h}\right\}.\right. \end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Интегрируя это уравнение в пределах от $y=0$ до $y=h$ и принимая во внимание условия [6], мы получим [3]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left[h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right]=\\ &=6\mu\left\{(U_0-U_1)\frac{\partial h}{\partial x}\right\}+2V_1. \end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

Если же положим, что не только p, но также и h не зависит от z, и предположим в то же время, что $V_1=0$, то получим два простых уравнения:

$$p_{xy}=p_{yx}=\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}(2y-h)+\mu\frac{U_1-U_0}{h}; \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)=6\mu(U_0-U_1)\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{12}$$

§ 4. Приложение основных уравнений к жидкому слою, находящемуся между подшипником и цапфой

Условимся для большего удобства вычислений заменять две системы ортогональных координатных плоскостей поверхностями круглых цилиндров, осью которых служит ось цапфы; присоединим к этим поверхностям систему плоскостей, проходящих через ту же ось цапфы. Необходимо определить цилиндрические поверхности посредством их радиусов и плоскости — посредством углов, которые они образуют с некоторой постоянной плоскостью. Третья система плоскостей координат, определенная расстояниями этих плоскостей от плоскости, перпендикулярной к оси, остается та же самая.

Приняв ось цапфы горизонтальной и взяв за основную плоскость координат вертикальную плоскость, проходящую через ось, можно считать углы, образуемые другими плоскостями, проходящими через эту самую ось, положительными по направлению движения часовой стрелки.

Обозначим на фиг. 1:

θ — углы, образуемые плоскостями координат с основной вертикальной плоскостью,

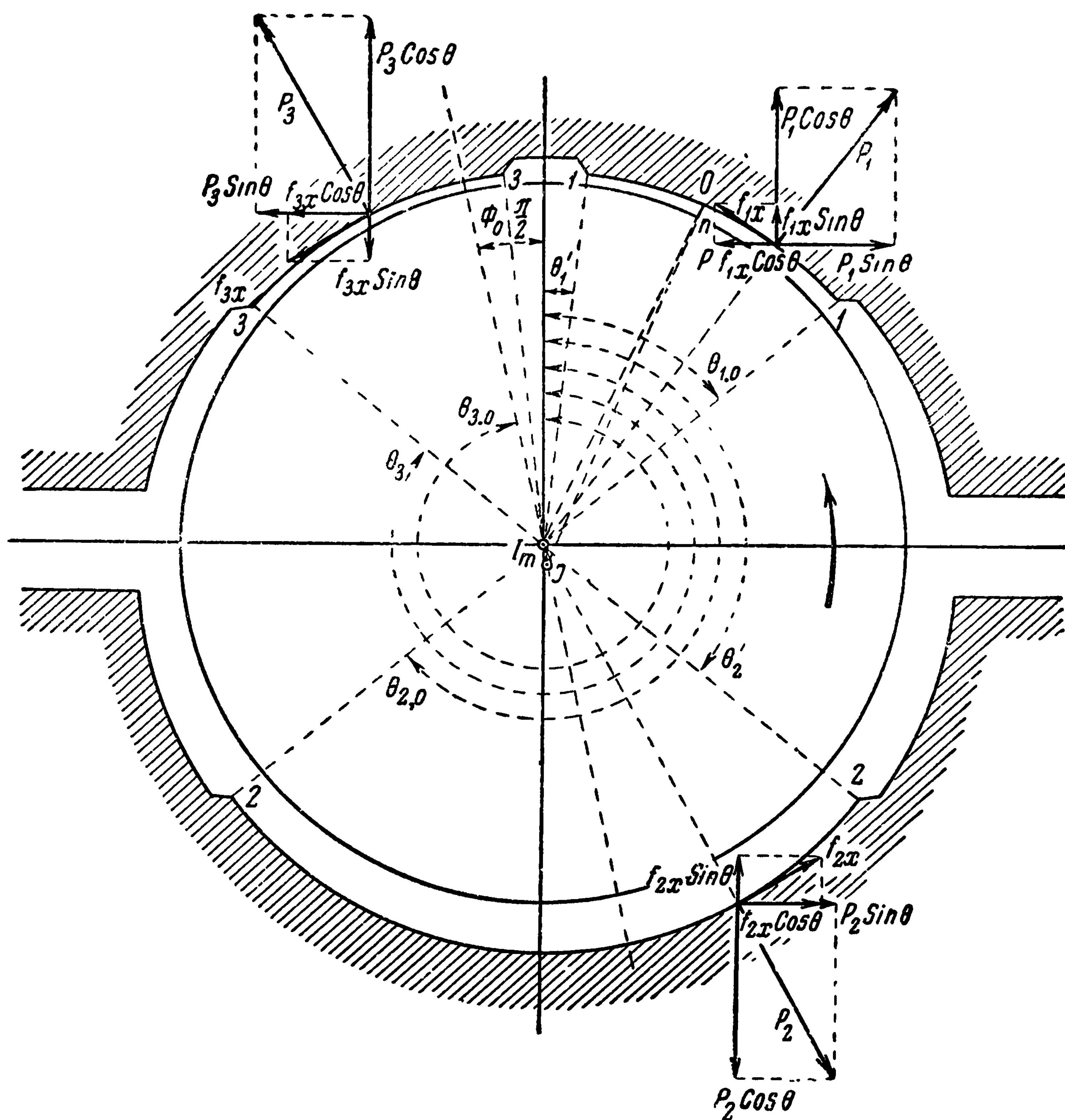
R — радиус цапфы,

r — расстояние рассматриваемой точки жидкого слоя от оси z.

В этом случае

$$x = R\theta, \qquad y = r - R, \tag{13}$$

где $R + a$ — радиус подшипника.



Фиг. 1

Обозначим через j точку пересечения оси цапфы с плоскостью чертежа и J точку пересечения оси подшипника с той же плоскостью.

Длина линии jJ должна быть во всех случаях меньше, чем a. Если назовем c некоторую правильную дробь, то ca представит длину линии jJ.

Обозначим через [4]

$$\frac{\pi}{2} - \Phi_0$$

угол, образованный радиусом подшипника, проходящим через ось цапфы. Наименьшее расстояние поверхности подшипника от поверхности цапфы, очевидно, будет

$$a(1-c).$$

Расстояние h поверхности подшипника до поверхности цапфы, измеренное по радиусу, образующему угол θ, определяется по фиг. 1. Обозначив через P и Q конечные точки этого расстояния, мы видим, что

$$JQ = R + a.$$

Проектируя линию JQ на направление jQ и вычитая из длины этой проекции mQ сумму линий $mj + jP$, мы находим, что

$$h = mQ - mj - jP.$$

Угол mQJ очень мал и поэтому его синус меньше, чем $\frac{ac}{R}$, и косинус mQJ отличается от единицы на величину меньшую, чем величина $\left(\frac{ca}{R}\right)^2$.

Таким образом, с приближением, ошибка которого не превышает указанных величин, можно написать равенство

$$JQ = mQ.$$

Затем из чертежа видно, что

$$mj = ca \cdot \cos mjJ,$$

и так как угол

$$mjJ = \theta - \Phi_0 + \frac{\pi}{2},$$

то имеем

$$mj = -ca \cdot \sin(\theta - \Phi_0),$$

отсюда

$$h = R + a + ca \cdot \sin(\theta - \Phi_0) - R,$$

или окончательно

$$h = a[1 + c\sin(\theta - \Phi_0)]. \tag{14}$$

На фиг. 1 положение точек, принадлежащих поверхности подшипника, определяется как геометрическое место из уравнения

$$r = R + a[1 + c\sin(\theta - \Phi_0)].$$

Переходя к преобразованию уравнений (11) и (12) через введение новых переменных, напомним, что p_{yx} обозначает силу трения, параллельную оси x на плоскости, перпендикулярной к оси y. Обозначая через f_x силу трения по направлению оси x, в силу уравнения (13), можно написать*

$$\partial x = R\,\partial\theta$$

и в силу уравнения (14)

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{R\partial\theta} = \frac{ac}{R}\cos(\theta - \Phi_0);$$

после этих уравнений можно написать уравнение (12) в форме

$$\frac{\partial}{R\partial\theta}\left[h^3\frac{\partial p}{R\partial\theta}\right] = \frac{6\mu(U_0 - U_1)ac}{R}\cos(\theta - \Phi_0),$$

откуда получим

$$\partial\left[h^3\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}\right] = 6\mu(U_0 - U_1)R\,ac\cos(\theta - \Phi_0)\,\partial\theta, \tag{15}$$

---

* Здесь и всюду далее мы оставляем, как было у автора, $\partial\theta$, а не $d\theta$, как пишут сейчас.

и преобразованное уравнение (11) сделается

$$f_x = -\frac{a}{2R}\,\frac{\partial p}{\partial\theta}[1+c\sin(\theta-\Phi_0)]+\mu\,\frac{U_1-U_0}{a[1+c\sin(\theta-\Phi_0)]}. \quad (16)$$

§. 5. Определение сил трения формулами, не содержащими ни одного дифференциального выражения

Интегрирование уравнения (15) дает значение $\frac{\partial p}{\partial\theta}$, внося которое в уравнение (16), мы можем определить силы трения f_x без дифференциальных выражений; интегрирование $\frac{\partial p}{\partial\theta}$ дает зависимость гидродинамического давления p от величин, которые его определяют.

Интегрирование уравнения (15) дает произвольную постоянную, определение которой должно быть сделано по условиям задачи. Это определение по примеру Рейнольдса может быть сведено к определению угла θ, для которого величина гидродинамического давления p достигает своего максимума. В случае, исследованном Рейнольдсом, где подшипник представляет непрерывную часть цилиндрической поверхности, имеется только один угол θ.

В случае, относящемся к моим опытам, для которых мои подшипники были составлены из двух частей цилиндра, гидродинамическое давление в каждой из этих частей имеет наибольшую величину и каждой из этих величин соответствует свой угол θ. В опытах Франческо Мази смазанная поверхность подшипника состоит из трех отдельных частей цилиндра; в каждой части гидродинамическое давление имеет свой максимум, и этим величинам соответствуют отдельные величины угла θ.

Назовем:

Φ_1 — величина угла θ, соответствующая максимуму p_1 в части подшипника, указанной на фиг. 1 цифрами *1, 1*.

Φ_2 — угол, соответствующий максимуму p_2 в части подшипника (*2, 2*).

Φ_3 — угол, соответствующий максимуму p_3 в части подшипника (*3, 3*).

Интегрируя уравнение (15) для части (*1, 1*) от $\theta=\Phi_1$ до некоторого значения θ, надо помнить, что при $\theta=\Phi_1$ давление p_1 достигает своего максимума, следовательно

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial \theta}\right)_{\theta=\Phi_1}=0,$$

откуда вытекает, что

$$h^3\frac{\partial p_1}{\partial \theta}=6\mu\,(U_0-U_1)\,R\,ac\,[\sin(\theta-\Phi_0)-\sin(\Phi_1-\Phi_0)]. \qquad (17)_1$$

Подобное интегрирование для части (*2, 2*) подшипника, в которой $\left(\frac{\partial p_2}{\partial \theta}\right)_{\theta=\Phi_2}=0$, приводит к уравнению

$$h^3\frac{\partial p_2}{\partial \theta}=6\mu\,(U_0-U_1)\,Rac\,[\sin(\theta-\Phi_0)-\sin(\Phi_2-\Phi_0)] \qquad (17)_2$$

и для части (*3, 3*) подшипника, где $\left(\frac{\partial p_3}{\partial \theta}\right)_{\theta=\Phi_3}=0$, получается

$$h^3\frac{\partial p_3}{\partial \theta}=6\mu\,(U_0-U_1)\,Rac\,[\sin(\theta-\Phi_0)-\sin(\Phi_3-\Phi_0)]. \qquad (17)_3$$

Из трех последних уравнений, заменяя h^3 второй частью уравнения (14), возведенной в куб, получим уравнения

$$\frac{\partial p_1}{\partial \theta}=\frac{6\mu\,(U_0-U_1)\,Rc\,[\sin(\theta-\Phi_0)-\sin(\Phi_1-\Phi_0]}{a^2\,[1+c\sin(\theta-\Phi_0)]^3}, \qquad (18)_1$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial \theta}=\frac{6\mu\,(U_0-U_1)\,Rc\,[\sin(\theta-\Phi_0)-\sin(\Phi_2-\Phi_0)]}{a^2\,[1+c\sin(\theta-\Phi_0)]^3}, \qquad (18)_2$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial \theta}=\frac{6\mu\,(U_0-U_1)\,Rc\,[\sin(\theta-\Phi_0)-\sin(\Phi_3-\Phi_0)]}{a^2\,[1+c\sin(\theta-\Phi_0)]^3}. \qquad (18)_3$$

Подставляя вторые части уравнений $(18)_1$, $(18)_2$ и $(18)_3$ в уравнение (16), мы находим выражение силы трения для

каждой отдельной части подшипника формулами, не содержащими дифференциального выражения, именно:

$$\left.\begin{aligned} f_{x,1} = &-\frac{3\mu c (U_0 - U_1)[\sin(\theta - \Phi_0) - \sin(\Phi_1 - \Phi_0)]}{a[1 + c\sin(\theta - \Phi_0)]^2} + \\ &+\frac{\mu(U_1 - U_0)}{a[1 + c\sin(\theta - \Phi_0)]} \end{aligned}\right\} \quad (19)_1$$

$$\left.\begin{aligned} f_{x,2} = &-\frac{3\mu c (U_0 - U_1)[\sin(\theta - \Phi_0) - \sin(\Phi_2 - \Phi_0)]}{a[1 + c\sin(\theta - \Phi_0)]^2} + \\ &+\frac{\mu(U_1 - U_0)}{a[1 + c\sin(\theta - \Phi_0)]}, \end{aligned}\right\} \quad (19)_2$$

$$\left.\begin{aligned} f_{x,3} = &-\frac{3\mu c (U_0 - U_1)[\sin(\theta - \Phi_0) - \sin(\Phi_2 - \Phi_0)]}{a[1 + c\sin(\theta - \Phi_0)]^2} + \\ &+\frac{\mu(U_1 - U_0)}{a[1 + c\sin(\theta - \Phi_0)]} \end{aligned}\right\} \quad (19)_3$$

§ 6. Приближенное определение гидродинамического давления

Для определений гидродинамических давлений p_1, p_2, p_3, соответствующих разным точкам в частях подшипника (*1, 1*), (*2, 2*), (*3, 3*), приходится интегрировать уравнения $(18)_1$, $(18)_2$ и $(18)_3$. В этих уравнениях переменные разделены; но вторые части этих уравнений выражаются настолько сложными функциями от θ, что точное интегрирование не представляется возможным. Для приближенного интегрирования можно, как это сделал Рейнольдс, применить развертывание вторых членов уравнений $(18)_1$, $(18)_2$ и $(18)_3$ в ряды синусов и косинусов кратных дуг $(\theta - \Phi_0)$.

Для выполнения этого преобразования напомним, что

$$\frac{1}{(1+\alpha)^3} = 1 - 3\alpha + 6\alpha^2 - 10\alpha^3 + \ldots = \Sigma(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}\alpha^{n-1},$$

и если

$$\alpha = c\sin(\theta - \Phi_0),$$

то имеем для части (*1, 1*) подшипника

$$\frac{\sin(\theta-\Phi_0)-\sin(\Phi_1-\Phi_0)}{[1+c\sin(\theta-\Phi_0)]^3}=$$

$$=[\sin(\theta-\Phi_0)-\sin(\Phi_1-\Phi_0)]\,\Sigma\,(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}\times$$

$$\times\, c^{n-1}\sin^{n-1}(\theta-\Phi_0).$$

Подобные же уравнения можно написать и для других частей подшипника, подставляя соответственные величины Φ_2 и Φ_3. Вторая часть равенства, очевидно, есть бесконечная сумма членов, расположенных по возрастающим степеням $\sin(\theta-\Phi_0)$.

Известно, что нечетные степени синуса могут быть представлены синусами кратных дуг при помощи формулы

$$\sin^n x=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}\left\{\sin nx-n\sin(n-2)x+\right.$$

$$\left.+\ldots\pm\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}{1\cdot2\ldots\frac{n-1}{2}}\sin x\right\}$$

и что четные степени могут быть выражены через косинусы кратных дуг при помощи формулы

$$\sin^m x=\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{2^{m-1}}\left\{\cos mx-m\cos(m-2)x+\right.$$

$$\left.+\ldots\pm\frac{\frac{1}{2}m\ldots\left(\frac{m}{2}+1\right)}{1\cdot2\ldots\frac{m}{2}}\right\}.$$

Приступая к указанным разложениям вторых частей уравнений $(18)_1$, $(18)_2$ и $(18)_3$ по степеням $\sin(\theta-\Phi_0)$ и принимая вышеприведенные формулы для четных и нечетных

степеней $\sin(\theta-\Phi_0)$ cosinus'ы и sinus'ы кратных дуг, мы получаем вместо уравнений $(18)_1$, $(18)_2$ и $(18)_3$, три следующих уравнения:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{a^2}{6\mu Rc(U_0-U_1)}=A_{1,0}+A_{1,1}\sin(\theta-\Phi_0)+\\&+A_{1,2}\cos2(\theta-\Phi_0)+\ldots+A_{1,2n}\cos2n(\theta-\Phi_0)+\\&\quad+A_{1,2n+1}\sin(2n+1)(\theta-\Phi_0)+\ldots,\end{aligned}\right\}\quad(20)_1$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{a^2}{6\mu(U_0-U_1)Rc}\frac{\partial p_2}{\partial\theta}=A_{2,0}+A_{2,1}\sin(\theta-\Phi_0)+\\&+A_{2,2}\cos2(\theta-\Phi_0)+\ldots+A_{2,2n}\cos2n(\theta-\Phi_0)+\\&\quad+A_{2,n+1}\sin(2n+1)(\theta-\Phi_0)+\ldots,\end{aligned}\right\}\quad(20)_2$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{a^2}{6\mu(U_0-U_1)Rc}\frac{\partial p_3}{\partial\theta}=A_{3,0}+A_{3,1}\sin(\theta-\Phi_0)+\\&+A_{3,2}\cos2(\theta-\Phi_0)+\ldots+A_{3,2n}\cos2n(\theta-\Phi)+\\&\quad+A_{3,2n+1}\sin(2n+1)(\theta-\Phi_0)+\ldots\end{aligned}\right\}\quad(20)_3$$

Интегрирование этих уравнений дает три произвольных постоянных, которые надо определить подобно уже полученным произвольным постоянным Φ_1, Φ_2 и Φ_3 и углу Φ_0, определенному через условие, что ему соответствует наибольшее значение h.

Для определения этих семи произвольных постоянных надо пользоваться условиями на границах жидкого слоя и условиями равновесия сил, приложенных к подшипнику.

Относительно условий на границах жидкого слоя следует заметить, что гидродинамические давления p_1, p_2 и p_3 должны быть равны атмосферному давлению p_0, когда угол θ соответствует крайним образующим подшипника, отмеченным на фиг. 1 точками (*1*, *1*), (*2*, *2*), (*3*, *3*), т. е. для

$$\theta=\theta_1',\quad \theta=\theta_{1,0},\quad \theta=\theta_2',\quad \theta=\theta_{2,0},\quad \theta=\theta_3',\quad \theta=\theta_{3,0},$$

должно иметь

$$p_1=p_2=p_3=p_0.$$

Условия равновесия сил, приложенных к неподвижному подшипнику, выражены тремя известными уравнениями статики твердого тела.

Если через L обозначим вес и нагрузку на единицу длины подшипника без учета атмосферного давления, а через M — момент этой нагрузки[5] по отношению к оси подшипника, то указанные уравнения будут

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\theta_1'}^{\theta_{1,0}}\{(p_1-p_0)\sin\theta-f_{1,x}\cos\theta\}R\partial\theta+\\&+\int_{\theta_2'}^{\theta_{2,0}}\{(p_2-p_0)\sin\theta-f_{2,x}\cos\theta\}R\partial\theta+\\&+\int_{\theta_3'}^{\theta_{3,0}}\{(p_3-p_0)\sin\theta-f_{3,x}\cos\theta\}R\,\partial\theta=0,\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\theta_1'}^{\theta_{1,0}}\{(p_1-p_0)\cos\theta+f_{1,x}\sin\theta\}R\,\partial\theta+\\&+\int_{\theta_2'}^{\theta_{2,0}}\{(p_2-p_0)\cos\theta+f_{2,x}\sin\theta\}R\,\partial\theta+\\&+\int_{\theta_3'}^{\theta_{3,0}}\{(p_3-p_0)\cos\theta+f_{3x}\sin\theta\}R\,\partial\theta=L,\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

$$\int_{\theta_1'}^{\theta_{1,0}}f_{1,x}R^2\,\partial\theta+\int_{\theta_2'}^{\theta_{2,x}}f_{2,x}R^2\,\partial\theta+\int_{\theta_3'}^{\theta_{3,x}}f_{3,x}R^2\,\partial\theta=M.\tag{23}$$

Для интегрирования, указанного в уравнениях $(21)_1$, $(22)_2$ и $(23)_3$, надо развернуть в ряды вторые части уравнений $(19)_1$, $(19)_2$ и $(19)_3$. Так же как и вторые части

уравнений $(18)_1$, $(18)_2$ и $(18)_3$, эти новые ряды, содержащие синус и косинус дуг $(\theta - \Phi_0)$, могут быть написаны в форме

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{\mu(U_1 - U_0)} f_{1,x} = B_{1,0} + B_{1,1} \sin(\theta - \Phi_0) + \\ + B_{1,2} \cos 2(\theta - \Phi_0) + \ldots + B_{1,2n} \cos 2n(\theta - \Phi_0) + \\ + B_{1,2n+1} \sin[(2n+1)(\theta - \Phi_0)],\end{aligned}\right\} \quad (24)_1$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{\mu(U_1 - U_0)} f_{2,x} = B_{2,0} + B_{2,1} \sin(\theta - \Phi_0) + \\ + B_{2,2} \cos 2(\theta - \Phi_0) + \ldots + B_{2,2n} \cos 2n(\theta - \Phi_0) + \\ + B_{2,2n+1} \sin[(2n+1)(\theta - \Phi_0)],\end{aligned}\right\} \quad (24)_2$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{\mu(U_1 - U_0)} f_{3,x} = B_{3,0} + B_{3,1} \sin(\theta - \Phi_0) + \\ + B_{3,2} \cos 2(\theta - \Phi_0) + \ldots + B_{3,2n} \cos 2n(\theta - \Phi_0) + \\ + B_{3,2n+1} \sin[(2n+1)(\theta - \Phi_0)].\end{aligned}\right\} \quad (24)_3$$

§ 7. *Определение формул, выражающих коэффициенты* $A_{1,0}$, $A_{1,1}$, $A_{1,2}, \ldots$, $A_{2,0}$, $A_{2,1}$, $A_{2,2}, \ldots$, $A_{3,0}$, $A_{3,1}$, $B_{1,0}$, $B_{1,1}$, $B_{1,2}, \ldots$, $B_{2,0}$, $B_{2,1}$, $B_{2,2}, \ldots$, $B_{3,0}$, $B_{3,1}$.

Эти коэффициенты можно определить, опираясь на указания, приведенные в § 6 относительно разложения в ряды величин гидродинамического давления p_1, p_2 и p_3.

Для упрощения этих формул можно положить [6]

$$X_1 = \sin(\Phi_1 - \Phi_0), \quad (25)_1$$

$$X_2 = \sin(\Phi_2 - \Phi_0), \quad (25)_2$$

$$X_3 = \sin(\Phi_3 - \Phi_0). \quad (25)_3$$

Пользуясь подобным обозначением, Осборн Рейнольдс вычислил эти коэффициенты, но некоторые из его чисел ошибочны, и, кроме того, ряды, которые он нашел, содержат недостаточное число членов для случая $c > 0.4$. Для $c = 0.5$, имея в виду вычисление с точностью до третьего или чет-

вертого знака, необходимо итти до c^{20} включительно и для $c=0.6$ необходимо взять все члены до c^{28} включительно, что дает следующие ряды с указанной степенью точности:

$$A_{1,0} = -1.5\,c - 3.75\,c^3 - 6.5625\,c^5 - 9.84375\,c^7 - 13.5351\,c^9 - \\ - 17.5957\,c^{11} - 21.97\,c^{13} - 25.48\,c^{15} - 31.681\,c^{17} - \\ - 37.002\,c^{19} - 42.550\,c^{21} - 48.372\,c^{23} - 54.920\,c^{25} - \\ - 60.680\,c^{27} - \{1 + 3\,c^2 + 5.625\,c^4 + 8.75\,c^6 + \\ + 12.3047\,c^8 + 16.242\,c^{10} + 20.528\,c^{12} + 25.137\,c^{14} + \\ + 30.046\,c^{16} + 35.334\,c^{18} + 40.702\,c^{20} + 46.418\,c^{22} + \\ + 52.406\,c^{24} + 59.146\,c^{26} + 65.015\,c^{28}\}\,X_1,$$

$$A_{1,1} = 1. + 4.5\,c^2 + 9.375\,c^4 + 15.3125\,c^6 + 22.1484\,c^8 + \\ + 29.7383\,c^{10} + 38.124\,c^{12} + 47.131\,c^{14} + 56.754\,c^{16} + \\ + 66.956\,c^{18} + 77.701\,c^{20} + 88.971\,c^{22} + 110.825\,c^{24} + \\ + 112.980\,c^{26} + 122.187\,c^{28} + \{3\,c + 7.5\,c^3 + 13.125\,c^5 + \\ + 19.6875\,c^7 + 27.070\,c^9 + 35.1914\,c^{11} + 43.989\,c^{13} + \\ + 53.415\,c^{15} + 63.431\,c^{17} + 74.004\,c^{19} + 85.102\,c^{21} + \\ + 96.708\,c^{23} + 108.800\,c^{25} + 121.349\,c^{27}\}\,X_1,$$

$$A_{1,2} = 1.5\,c + 5\,c^3 + 9.84375\,c^5 + 15.75\,c^7 + 22.56445\,c^9 + \\ + 30.164\,c^{11} + 38.49\,c^{13} + 47.48\,c^{15} + 56.902\,c^{17} + \\ + 68.876\,c^{19} + 78.007\,c^{21} + 89.268\,c^{23} + 101.283\,c^{25} + \\ + 113.258\,c^{27} + \{3\,c^2 + 7.5\,c^4 + 13.125\,c^6 + 19.6875\,c^8 + \\ + 20.0703\,c^{10} + 35.1914\,c^{12} + 43.989\,c^{14} + 53.415\,c^{16} + \\ + 63.431\,c^{18} + 74.004\,c^{20} + 85.102\,c^{22} + 96.708\,c^{24} + \\ + 108.800\,c^{26} + 121.349\,c^{28}\}\,X_1,$$

$$A_{1,3} = -1.5\,c^2 - 4.6875\,c^4 - 9.1895\,c^6 - 14.7656\,c^8 - \\ - 21.2695\,c^{10} - 28.593\,c^{12} - 36.658\,c^{14} - 45.406\,c^{16} - \\ - 54.783\,c^{18} - 64.749\,c^{20} - 75.285\,c^{22} - 97.318\,c^{24} - \\ - 97.917\,c^{26} - 109.977\,c^{28} - \{2.5\,c^3 + 6.5625\,c^5 + \\ + 11.8125\,c^7 + 18.047\,c^9 + 25.1367\,c^{11} + 32.992\,c^{13} + \\ + 41.545\,c^{15} + 49.304\,c^{17} + 60.549\,c^{19} + 70.916\,c^{21} + \\ + 81.831\,c^{23} + 95.368\,c^{25} + 105.170\,c^{27}\}\,X_1,$$

$$
\begin{aligned}
A_{1,4} = & - 1.25\, c^{3} - 3.9375\, c^{5} - 7.875\, c^{7} - 12.8906\, c^{9} - \\
& - 18.852\, c^{11} - 25.66\, c^{13} - 33.236\, c^{15} - 41.421\, c^{17} - 50.457\, c^{19} - \\
& - 60.007\, c^{21} - 70.140\, c^{23} - 80.821\, c^{25} - 92.024\, c^{27} - \\
& - \{1.875\, c^{4} + 5.25\, c^{6} + 9.84375\, c^{8} + 15.4688\, c^{10} + \\
& + 21.0946\, c^{12} + 29.326\, c^{14} + 37.392\, c^{16} + 46.023\, c^{18} + \\
& + 55.502\, c^{20} + 65.462\, c^{22} + 75.985\, c^{24} + \\
& + 87.038\, c^{26} + 98.597\, c^{28}\}\, X_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{1,5} = & \; 0.9375\, c^{4} + 3.0625\, c^{6} + 6.328\, c^{8} + 10.634\, c^{10} + \\
& + 12.884\, c^{12} + 21.994\, c^{14} + 28.893\, c^{16} + 36.558\, c^{18} + \\
& + 44.837\, c^{20} + 53.773\, c^{22} + 63.320\, c^{24} + 73.438\, c^{26} + \\
& + 84.009\, c^{28} + \{1.3125\, c^{5} + 3.9375\, c^{7} + 7.7344\, c^{9} + \\
& + 12.5683\, c^{11} + 18.329\, c^{13} + 24.921\, c^{15} + 32.292\, c^{17} + \\
& + 40.406\, c^{19} + 49.107\, c^{21} + 58.449\, c^{23} + 63.320\, c^{25} + \\
& + 78.878\, c^{27}\}\, X_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{1,6} = & \; 0.65625\, c^{5} + 2.25\, c^{7} + 4.834\, c^{9} + 8.738\, c^{11} + 12.83\, c^{13} + \\
& + 18.13\, c^{15} + 24.693\, c^{17} + 31.051\, c^{19} + 38.574\, c^{21} + \\
& + 50.337\, c^{23} + 55.563\, c^{25} + 64.960\, c^{27} + \{0.875\, c^{6} + \\
& + 2.1825\, c^{8} + 5.8008\, c^{10} + 9.7759\, c^{12} + 14.663\, c^{14} + \\
& + 20.395\, c^{16} + 27.326\, c^{18} + 34.156\, c^{20} + 42.084\, c^{22} + \\
& + 54.532\, c^{24} + 59.837\, c^{26} + 69.60\, c^{28}\}\, X_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{1,7} = & - 0.4375\, c^{6} - 1.582\, c^{8} - 1.7724\, c^{10} - 6.354\, c^{12} - \\
& 9.998\, c^{14} - 14.446\, c^{16} - 19.665\, c^{18} - 25.616\, c^{20} - \\
& - 32.264\, c^{22} - 39.575\, c^{24} - 47.518\, c^{26} - 56.057\, c^{28} - \\
& - \{0.5625\, c^{7} + 1.934\, c^{9} + 4.18\, c^{11} + 7.331\, c^{13} + \\
& + 13.33\, c^{15} + 16.146\, c^{17} + 21.735\, c^{19} + 28.055\, c^{21} + \\
& + 35.070\, c^{23} + 39.575\, c^{25} + 51.038\, c^{27}\}\, X_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{1,8} = & - 0.281\, c^{7} - 1.074\, c^{9} - 2.513\, c^{11} - 4.664\, c^{13} - 7.55\, c^{15} - \\
& - 11.151\, c^{17} - 15.525\, c^{19} - 20.574\, c^{21} - 26.307\, c^{23} - \\
& - 32.685\, c^{25} - 39.694\, c^{27} - \{0.358\, c^{8} + 1.4484\, c^{10} + \\
& + 2.93\, c^{12} + 5.332\, c^{14} + 8.498\, c^{16} + 12.390\, c^{18} + \\
& + 17.078\, c^{20} + 22.444\, c^{22} + 28.499\, c^{24} + \\
& + 35.199\, c^{26} + 42.530\, c^{28}\}\, X_1,
\end{aligned}
$$

$$A_{1,} = 0.176\,c^8 + 0.709\,c^{10} + 1.733\,c^{12} + 3.332\,c^{14} + 5.555\,c^{16} + 8.430\,c^{18} + 11.954\,c^{20} + 16.132\,c^{22} + 20.950\,c^{24} + 28.355\,c^{28} + \{0.215\,c^9 + 0.84\,c^{1} + 2.00\,c^{13} + 3.777\,c^{15} + 6.209\,c^{17} + 9.318\,c^{19} + 13.093\,c^{21} + 17.535\,c^{23} + 20.950\,c^{25} + 28.355\,c^{27}\}\,X_1$$

$$A_{1,10} = 0.107\,c^9 + 0.457\,c^{11} + 1.166\,c^{13} + 2.324\,c^{15} + 3.991\,c^{17} + 6.210\,c^{19} + 9.002\,c^{21} + 12.378\,c^{23} + 16.343\,c^{25} + 20.892\,c^{27} + \{0.129\,c^{10} + 0.53\,c^{12} + 1.333\,c^{14} + 2.615\,c^{16} + 4.435\,c^{18} + 6.831\,c^{20} + 9.820\,c^{22} + 13.410\,c^{24} + 17.6\,c^{26} + 22.385\,c^{28}\}\,X_1,$$

$$A_{1,11} = -0.064\,c^{10} - 0.29\,c^{12} - 0.769\,c^{14} - 1.588\,c^{16} - 2.810\,c^{18} - 4.481\,c^{20} - 6.643\,c^{22} - 9.311\,c^{24} - 12.5\,c^{26} - 16.23\,c^{28} - \{0.076\,c^{11} + 0.333\,c^{13} + 0.871\,c^{15} + 1.775\,c^{17} + 3.106\,c^{19} + 4.908\,c^{21} + 7.221\,c^{23} + 9.311\,c^{25} + 13.426\,c^{27}\}\,X_1,$$

$$A_{1,12} = -0.038\,c^{11} - 0.179\,c^{13} - 0.498\,c^{15} - 1.062\,c^{17} - 1.940\,c^{19} - 3.175\,c^{21} - 4.809\,c^{23} - 6.880\,c^{25} - 9.403\,c^{27} - \{0.045\,c^{12} + 0.205\,c^{14} + 0.56\,c^{16} + 1.18\,c^{18} + 2.134\,c^{20} + 3.464\,c^{22} + 5.21\,c^{24} + 7.409\,c^{26} + 10.075\,c^{28}\}\,X_1. \qquad (26)$$

$$B_{1,0} = 1 - 2.5\,c^2 - 4.125\,c^4 - 5.3125\,c^6 - 6.289\,c^8 - 7.713\,c^{10} - 7.896\,c^{12} - 8.588\,c^{14} - 9.230\,c^{16} - 9.819\,c^{18} - 10.396\,c^{20} - 10.932\,c^{22} - 11.448\,c^{24} - 12.048\,c^{26} - \{3c + 4.5\,c^3 + 5.625\,c^5 + 6.562\,c^7 + 7.383\,c^9 + 8.121\,c^{11} + 8.798\,c^{13} + 9.426\,c^{15} + 10.015\,c^{17} + 10.560\,c^{19} + 11.101\,c^{21} + 11.604\,c^{23} + 12.093\,c^{25} + 12.674\,c^{27}\}\,X_1,$$

$$B_{1,1} = 2\,c + 6\,c^3 + 8.75\,c^5 + 10.9375\,c^7 + 12.797\,c^9 + 14.375\,c^{11} + 15.920\,c^{13} + 17.285\,c^{15} + 18.547\,c^{17} + 19.734\,c^{19} + 20.855\,c^{21} + 21.940\,c^{23} + 25.234\,c^{25} + 23.811\,c^{27} + \{6\,c^2 + 9\,c^4 + 11.25\,c^6 + 13.125\,c^8 + 14.765\,c^{10} + 16.242\,c^{12} + 17.595\,c^{14} + 18.885\,c^{16} + 20.031\,c^{18} + 21.144\,c^{20} + 22.200\,c^{22} + 23.210\,c^{24} + 26.083\,c^{26}\}\,X_1,$$

$$B_{1,2} = 2.5\,c^2 + 5.5\,c^4 + 7.96878\,c^6 + 10.0625\,c^8 + 11.895\,c^{10} + 13.535\,c^{12} + 15.029\,c^{14} + 16.409\,c^{16} + 17.636\,c^{18} + 19.351\,c^{20} + 20.041\,c^{22} + 21.127\,c^{24} + 22.163\,c^{26} + \{4.5\,c^3 + 7.5\,c^5 + 9.843\,c^7 + 11.8125\,c^9 + 13.53\,c^{11} + 15.082\,c^{13} + 16.496\,c^{15} + 17.805\,c^{17} + 19.902\,c^{19} + 20.663\,c^{21} + 21.275\,c^{23} + 22.317\,c^{25} + 23.314\,c^{27}\}X_1,$$

$$B_{1,3} = -2\,c^3 - 4.375\,c^5 - 6.5625\,c^7 - 8.5313\,c^9 - 10.313\,c^{11} - 11.940\,c^{13} - 13.461\,c^{15} - 14.839\,c^{17} - 16.146\,c^{19} - 17.379\,c^{21} - 18.548\,c^{23} - 21.715\,c^{25} - 20.723\,c^{27} - \{3\,c^4 + 5.625\,c^6 + 7.875\,c^8 + 9.843\,c^{10} + 11.601\,c^{12} + 13.197\,c^{14} + 14.663\,c^{16} + 16.026\,c^{18} + 17.3\,c^{20} + 18.5\,c^{22} + 19.639\,c^{24} + 22.888\,c^{26}\}X_1,$$

$$B_{1,4} = -1.375\,c^4 - 3.1875\,c^6 - 5.03125\,c^8 - 6.8\,c^{10} - 8.46\,c^{12} - 10.02\,c^{14} - 11.486\,c^{16} - 12.838\,c^{18} - 14.176\,c^{20} - 15.418\,c^{22} - 16.6\,c^{24} - 17.5\,c^{26} - \{1.875\,c^5 + 3.9375\,c^7 + 5.906\,c^9 + 7.734\,c^{11} + 9.426\,c^{13} + 10.997\,c^{15} + 12.464\,c^{17} + 13.807\,c^{19} + 15.137\,c^{21} + 16.365\,c^{23} + 17.535\,c^{25} + 18{,}651\,c^{27}\}X_1,$$

$$B_{1,5} = 0.875\,c^5 + 2.1875\,c^7 + 3.6563\,c^9 + 5.156\,c^{11} + 6.634\,c^{13} + 8.065\,c^{15} + 9.442\,c^{17} + 10.775\,c^{19} + 12.034\,c^{21} + 13.248\,c^{23} + 14.417\,c^{25} + 15.542\,c^{27} + \{1.125\,c^6 + 2.625\,c^8 + 4.219\,c^{10} + 5.801\,c^{12} + 7.332\,c^{14} + 8.798\,c^{16} + 10.197\,c^{18} + 11.545\,c^{20} + 12.811\,c^{22} + 14.028\,c^{24} + 15.197\,c^{26}\}X_1,$$

$$B_{1,6} = 0.53125\,c^6 + 1.4375\,c^8 + 2.55\,c^{10} + 3.76\,c^{12} + 5.01\,c^{14} + 6.265\,c^{16} + 7.622\,c^{18} + 8.724\,c^{20} + 9.911\,c^{22} + 11.913\,c^{24} + 12.189\,c^{26} + \{0.6562\,c^7 + 1.7\,c^9 + 2.9\,c^{11} + 4.38\,c^{13} + 5.499\,c^{15} + 6.798\,c^{17} + 8.198\,c^{19} + 9.315\,c^{21} + 10.521\,c^{23} + 12.584\,c^{25} + 12.882\,c^{27}\}X_1,$$

$$B_{1,7} = -0.3125\,c^7 - 0.914\,c^9 - 1.772\,c^{11} - 2.653\,c^{13} - 3.666\,c^{15} - 4.721\,c^{17} - 5.796\,c^{19} - 6.875\,c^{21} - 7.949\,c^{23} - 9.011\,c^{25} - 10.061\,c^{27} - \{0.375\,c^8 + 1.055\,c^{10} + 1.936\,c^{12} + 2.932\,c^{14} + 3.999\,c^{16} + 5.099\,c^{18} + 6.21\,c^{20} + 7.319\,c^{22} + 8.417\,c^{24} + 9.498\,c^{26}\}\,X_1,$$

$$B_{1,8} = -0.18\,c^8 - 0.57\,c^{10} - 1.13\,c^{12} - 1.822\,c^{14} - 2.61\,c^{16} - 3.456\,c^{18} - 4.362\,c^{20} - 5.286\,c^{22} - 6.226\,c^{24} - 7.17\,c^{26} - \{0.211\,c^9 + 0.644\,c^{11} + 1.257\,c^{13} + 1.999\,c^{15} + 2.883\,c^{17} + 3.717\,c^{19} + 4.658\,c^{21} + 5.611\,c^{23} + 6.577\,c^{25} + 7.543\,c^{27}\}\,X_1,$$

$$B_{1,9} = 0.101\,c^9 + 0.305\,c^{11} + 0.724\,c^{13} + 1.222\,c^{15} + 1.816\,c^{17} + 2.485\,c^{19} + 3.209\,c^{21} + 3.975\,c^{23} + 4.77\,c^{25} + 5.575\,c^{27} + \{0.116\,c^{10} + 0.38\,c^{12} + 0.8\,c^{14} + 1.333\,c^{16} + 1.961\,c^{18} + 2.662\,c^{20} + 3.416\,c^{22} + 4.208\,c^{24} + 5.028\,c^{26}\}\,X_1,$$

$$B_{1,10} = 0.57\,c^{10} + 0.203\,c^{12} + 0.456\,c^{14} + 0.803\,c^{16} + 1.237\,c^{18} + 1.745\,c^{20} + 2.313\,c^{22} + 2.929\,c^{24} + 3.564\,c^{26} + \{0.064\,c^{11} + 0.223\,c^{13} + 0.5\,c^{15} + 0.872\,c^{17} + 1.354\,c^{19} + 1.863\,c^{21} + 2.455\,c^{23} + 3.095\,c^{25} + 3.771\,c^{27}\}\,X_1,$$

$$B_{1,11} = -0.31\,c^{11} - 0.12\,c^{13} - 0.282\,c^{15} - 0.519\,c^{17} - 0.828\,c^{19} - 1.203\,c^{21} - 1.637\,c^{23} - 2.12\,c^{25} - 2.976\,c^{27} - \{0.035\,c^{12} + 0.133\,c^{14} + 0.308\,c^{16} + 0.561\,c^{18} + 0.887\,c^{20} + 1.28\,c^{22} + 1.733\,c^{24} + 2.234\,c^{26}\}\,X_1,$$

$$B_{1,12} = -0.0168\,c^{12} - 0.0701\,c^{14} - 0.172\,c^{16} + 0.329\,c^{18} + 0.545\,c^{20} - 0.816\,c^{22} - 1.138\,c^{24} - 1.509\,c^{26} - \{0.049\,c^{13} + 0.077\,c^{15} + 0.354\,c^{19} + 0.582\,c^{21} + 0.866\,c^{23} + 1.202\,c^{25}\}\,X_1. \qquad (27)$$

Другие коэффициенты $A_{2,i}$, $A_{3,i}$, $B_{2,i}$, $B_{3,i}$ получаются при помощи формул (26), (27) простым замещением X_1 через X_2 и через X_3.

Вторые члены формул (26) и (27), представляющие ряды, развернутые по возрастающим степеням c, не имеют вид рядов очевидно сходящихся, но вычисления показывают, что для величин c, не превышающих 0.6, ряды суть сходящиеся. Для малых значений c они убывают достаточно быстро, но для значений c, близких к 0.6, необходимо взять иногда очень большое число членов, вплоть до c^{28}.

Во всех случаях надо иметь в виду, что после интегрирования вопрос разрешается только в случаях, для которых нет сомнения относительно сходимости рядов, находящихся во вторых членах уравнений $(20)_1$, $(20)_2$, $(20)_3$, $(24)_1$, $(24)_2$, $(24)_3$.

§ 8. *Интегрирование дифференциальных уравнений, выражающих гидродинамическое давление*

Владея методом определения коэффициентов A и B с различными индексами, можно интегрировать уравнения $(20)_1$, $(20)_2$ и $(20)_3$ и таким образом определить гидродинамическое давление p_1, p_2 и p_3 во всех точках жидкого слоя. Интегрируя эти уравнения в пределах от θ_1' до θ, от θ_2' до θ и от θ_3' до θ, получим

$$\frac{a^2}{6\mu(U_0-U_1)Rc}(p_1-p_0)=A_{1,0}\theta-A_{1,1}\cos(\theta-\Phi_0)+$$
$$+\frac{A_{1,2}}{2}\sin 2(\theta-\Phi_0)+\ldots\frac{A_{1,2n}}{2n}\sin 2n(\theta-\Phi_0)-$$
$$-\frac{A_{1,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta-\Phi_0)-\ldots$$
$$-A_{1,0}\theta'+A_{1,1}\cos(\theta_1'-\Phi_0)-\frac{A_{1,2}}{2}\sin 2(\theta_1'-\Phi_0)+\ldots$$
$$-\frac{A_{1,2n}}{2n}\sin 2n(\theta_1'-\Phi_0)+\frac{A_{1,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta_1'-\Phi_0).\quad(28)_1$$

$$\frac{a^2}{6\mu(U_0-U_1)Rc}(p_2-p_0)=A_{2,0}\theta-A_{2,1}\cos(\theta-\Phi_0)+$$
$$+\frac{A_{2,2}}{2}\sin 2(\theta-\Phi_0)+\cdots+\frac{A_{2,2n}}{2n}\sin 2n(\theta-\Phi_0)-$$
$$-\frac{A_{2,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta-\Phi_0)-A_{2,0}\theta_2'+$$
$$+A_{2,1}\cos(\theta_2'-\Phi_0)-\frac{A_{2,2}}{2}\sin 2(\theta_2'-\Phi_0)+\cdots$$
$$-\frac{A_{2,2n}}{2n}\sin 2n(\theta_2'-\Phi_0)+\ldots\frac{A_{2,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta_2'-\Phi_0). \quad (28)_2$$

$$\frac{a^2}{6\mu(U_0-U_1)Rc}(p_3-p_0)=A_{3,0}\theta-A_{3,1}\cos(\theta-\Phi_0)+$$
$$+\frac{A_{3,2}}{2}\sin 2(0-\Phi_0)+\frac{A_{3,2n}}{2n}\sin 2n(\theta-\Phi_0)-$$
$$-\frac{A_{3,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta-\Phi_0)-A_{3,0}\theta_3'+$$
$$+A_{3,1}\cos(\theta_3'-\Phi_0)-\frac{A_{3,2}}{2}\sin 2(\theta_3'-\Phi_0)+\cdots$$
$$-\frac{A_{3,2n}}{2n}\sin 2n(\theta_3'-\Phi_0)+\frac{A_{3,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta_3'-\Phi_0). \quad (28)_3$$

Коэффициенты этих уравнений, как показывает группа уравнений (26), содержит еще три неопределенных величины X_1, X_2 и X_3 или, как видно из уравнений (25), углы Φ_1, Φ_2 и Φ_3.

Для этих определений нужно пользоваться тремя уравнениями из граничных условий, которые получаются из последних уравнений (28), учитывая, что на границах каждой части подшипника имеем: $p=p_0$.

Поэтому, подставляя в (28) угол $\theta_{1,0}$ на место θ, необходимо подставить p_0 на место p_1; в (28), помещая $\theta_{2,0}$ на место θ, подставляем p_0 на место p_2 и в (28), подставляя $\theta_{3,0}$ на

место θ, мы подставляем p_0 на место p_3. Таким образом, получается три следующих уравнения из граничных условий:

$$0 = A_{1,0}\theta_{1,0} - A_{1,1}\cos(\theta_{1,0} - \Phi_0) + \frac{A_{1,2}}{2}\sin 2(\theta_{1,0} - \Phi_0) + \ldots$$

$$+ \frac{A_{1,2n}}{2}\sin 2n(\theta_{1,0} - \Phi_0) - \frac{A_{1,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta_{1,0} - \Phi_0) - \ldots$$

$$- A_{1,0}\theta_1' + A_{1,1}\cos(\theta_1' - \Phi_0) - \frac{A_{1,2}}{2}\sin 2(\theta_1' - \Phi_0) + \ldots$$

$$- \frac{A_{1,2n}}{2n}\sin 2n(\theta_1' - \Phi_0) + \frac{A_{1,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta_1' - \Phi_0)\ldots \quad (29)_1$$

$$0 = A_{2,0}\theta_{2,0} - A_{2,1}\cos(\theta_{2,0} - \Phi_0) + \frac{A_{2,2}}{2}\sin 2(\theta_{2,0} - \Phi_0) + \ldots$$

$$+ \frac{A_{2,2n}}{2n}\sin 2n(\theta_{2,0} - \Phi_0) - \frac{A_{2,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta_{2,0} - \Phi_0) - \ldots$$

$$- A_{2,0}\theta_2' + A_{2,1}\cos(\theta_2' - \Phi_0) - \frac{A_{2,2}}{2}\sin 2(\theta_2' - \Phi_0) + \ldots$$

$$- \frac{A_{2,2n}}{2n}\sin 2n(\theta_2' - \Phi_0) + \frac{A_{2,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta_2' - \Phi_0). \quad (29)_2$$

$$0 = A_{3,0}\theta_{3,0} - A_{3,1}\cos(\theta_{3,0} - \Phi_0) + \frac{A_{3,2}}{2}\sin 2(\theta_{3,0} - \Phi_0) + \ldots$$

$$+ \frac{A_{3,2n}}{2n}\sin 2n(\theta_{3,0} - \Phi_0) - \frac{A_{3,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta_{3,0} - \Phi_0) - \ldots$$

$$- A_{3,0}\theta_3', + A_{3,1}\cos(\theta_3' - \Phi_0) - \frac{A_{3,2}}{2}\sin 2(\theta_3' - \Phi_0) + \ldots$$

$$- \frac{A_{3,2n}}{2n}\sin 2n(\theta_3' - \Phi_0) + \frac{A_{3,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta_3' - \Phi_0) \quad (29)_3$$

В случае расположения частей подшипника симметрично относительно вертикальной линии, т. е. в случае, где [7]

$$\theta_1' = 2\pi - \theta_{3,0}, \quad \theta_{1,0} = 2\pi - \theta_3', \quad \theta_2' = \pi - \alpha_1, \quad \theta_{3,0} = \pi + \alpha_1,$$

заменяя углы второй части подшипника через

$$\theta = \pi + \alpha$$

и заменяя обозначения θ_1 и $\theta_{1,0}$ просто через θ' и θ_0, можно заменить уравнения (28) тремя следующими: [8]

$$\frac{a^2}{6\mu(U_0 - U_1)}(p_1 - p_0) = A_{1,0}\,\theta - A_{1,1}\cos(\theta - \Phi_0) +$$
$$+ \frac{A_{1,2}}{2}\sin 2(\theta - \Phi_0) + \ldots + \frac{A_{1,2n}}{2n}\sin 2n(\theta - \Phi_0) -$$
$$- \frac{A_{1,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta - \Phi_0)\ldots - A_{1,0}\theta' +$$
$$+ A_{1,1}\cos(\theta' - \Phi_0) - \frac{A_{1,2}}{2}\sin 2(\theta' - \Phi_0) + \ldots$$
$$- \frac{A_{1,2n}}{2n}\sin 2n(\theta' - \Phi_0) + \frac{A_{1,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta' - \Phi_0)\ldots \quad (30)_1$$

$$\frac{a^2}{6\mu(U_0 - U_1)Rc}(p_2 - p_0) = A_{2,0}\alpha - A_{2,1}\cos(\alpha - \Phi_0) +$$
$$+ \frac{A_{2,2}}{2}\sin 2(\alpha - \Phi_0) + \ldots + \frac{A_{2,2n}}{2n}\sin 2n(\alpha - \Phi_0) -$$
$$- \frac{A_{2,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\alpha - \Phi_0)\ldots - A_{2,0}\alpha_1 +$$
$$+ A_{2,1}\cos(\alpha_1 - \Phi_0) - \frac{A_{2,2}}{2}\sin 2(\alpha_1 - \Phi_0) + \ldots$$
$$- \frac{A_{2,2n}}{2n}\sin 2n(\alpha_1 - \Phi_0) + \frac{A_{2,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\alpha_1 - \Phi_0). \quad (30)_2$$

$$\frac{a^2}{6\mu(U_0 - U_1)Rc}(p_3 - p_0) = A_{3,0}\theta - A_{3,1}\cos(\theta - \Phi_0) +$$
$$+ \frac{A_{3,2}}{2}\sin 2(\theta - \Phi_0) + \ldots + \frac{A_{3,2n}}{2n}\sin 2n(\theta - \Phi_0) -$$
$$- \frac{A_{3,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta - \Phi_0)\ldots - A_{3,0}\theta' +$$

$$+A_{3,\,1}\cos(\theta'-\Phi_0)-\frac{A_{2,\,2}}{2}\sin 2(\theta'-\Phi_0)+\ldots$$

$$-\frac{A_{3,\,2n}}{2n}\sin 2n(\theta'-\Phi_0)+\frac{A_{3,\,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta'-\Phi_0). \quad (30)_3$$

с условием заменить в уравнении $(30)_3$ θ и θ' числами, которые им соответствуют со знаками — (минус).

При сделанных предположениях уравнения граничных условий будут [9]

$$0=A_{1,\,0}\theta_0-A_{1,\,1}\cos(\theta_0-\Phi_0)+\frac{A_{1,\,2}}{2}\sin 2(\theta_0-\Phi_0)+\ldots$$

$$+\frac{A_{1,\,2n}}{2n}\sin 2n(\theta_0-\Phi_0)-\frac{A_{1,\,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta_0-\Phi_0)-$$

$$-A_{1,\,0}\theta'+A_{1,\,1}\cos(\theta'-\Phi_0)-\frac{A_{1,\,2}}{2}\sin 2(\theta'-\Phi_0)+\ldots$$

$$-\frac{A_{1,\,2n}}{2n}\sin 2n(\theta'-\Phi_0)+\frac{A_{1,\,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta'-\Phi_0). \quad (31)_1$$

$$0=A_{3,\,0}\alpha_1-A_{2,\,1}\sin\alpha_1\sin\Phi_0+\frac{A_{2,\,2}}{2}\sin 2\alpha_1\cos 2\Phi_0+\ldots$$

$$+\frac{A_{2,\,2n}}{2n}\sin 2n\,\alpha_1\cos 2n\Phi_0-$$

$$-\frac{A_{2,\,2n+1}}{2n+1}\sin(2n+1)\alpha_1\sin(2n+1)\Phi_0. \quad (31)_2$$

$$0=A_{3,\,0}\theta_0-A_{3,\,1}\cos(\theta_0-\Phi_0)+\frac{A_{3,\,2}}{2}\sin 2(\theta_0-\Phi_0)+\ldots$$

$$+\frac{A_{3,\,2n}}{2n}\sin 2n(\theta_0-\Phi_0)-\frac{A_{3,\,2n+1}}{2n+1}\cos 2(n+1)(\theta_0+\Phi_0)-$$

$$-A_{3,\,0}\theta'+A_{3,\,1}\cos(\theta'-\Phi_0)-\frac{A_{3,\,2}}{2n}\sin 2(\theta'-\Phi_0)+\ldots-$$

$$-\frac{A_{3,\,2n}}{2n}\sin 2n(\theta'-\Phi_0)+\frac{A_{3,\,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta'-\Phi_0). \quad (31)_3$$

В уравнении $(31)_3$, вместо углов θ' и θ_1, поставим их числовые значения со знаком —. При применении этой теории к случаю, разобранному Осборном Рейнольдсом, следует заметить, что если две верхние части поверхности подшипника сливаются, то угол θ' сделается нулем. Гидродинамические давления p_1 и p_3 составят непрерывную функцию, и для всей поверхности, образованной двумя слившимися частями, имеется один максимум гидродинамического давления. Также углы Φ_1 и Φ_3 совпадают, и в то же время и x_1 и x_3 делаются равными. Вследствие равенства этих двух последних величин коэффициенты $A_{1,i}$ и $A_{3,i}$ делаются также равными

$$A_{1,i}=A_{3,i}.$$

В уравнении $(31)_3$, заменяем коэффициенты с индексом 3 коэффициентами с индексом 1 и подставляем $-\theta'$ и $-\theta_0$ вместо θ' и θ_0; достаточно вычесть таким образом преобразованное уравнение $(31)_3$ из уравнения $(31)_1$, чтобы получить уравнение, найденное Осборном Рейнольдсом:

$$0=A_{1,0}\theta_0-A_{1,1}\sin\theta_0\sin\Phi_0+\frac{A_{1,2}}{2n}\sin 2\theta_0\cos 2\Phi_0+\ldots$$

$$+\frac{A_{1,2n}}{2}\sin 2n\,\theta_0\cos 2n\Phi_0-$$

$$-\frac{A_{1,2n+1}}{2n+1}\sin(2n+1)\,\theta_0\sin(2n+1)\,\Phi_0.$$

§ 9. Интегрирование уравнений равновесия подшипника

а) Интегрирование уравнения (21)

Введем следующие обозначения [10] для суммы членов, стоящих во вторых частях уравнений $(30)_1$, $(30)_2$, $(30)_3$:

$$S_1 = -A_{1,\,0}\theta' + A_{1,\,1}\cos(\theta' - \Phi_0) - \frac{A_{1,\,2}}{2}\sin 2(\theta' - \Phi_0) + \ldots$$

$$-\frac{A_{1,\,2n}}{2n}\sin 2n(\theta' - \Phi_0) + \frac{A_{1,\,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta' - \Phi_0). \quad (32)_1$$

$$S_2 = -A_{2,\,0}\alpha_1 + A_{2,\,1}\cos(\alpha_1 - \Phi_0) - \frac{A_{2,\,2}}{2}\sin 2(\alpha_1 - \Phi_0) + \ldots$$

$$-\frac{R_{2,\,2n}}{2n}\sin 2n(\alpha_1 - \Phi_0) + \frac{A_{2,\,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\alpha_1 - \Phi_0). \quad (32)_2$$

$$S_3 = A_{3,\,0}\theta' + A_{3,\,1}\cos(\theta' + \Phi_0) + \frac{A_{3,\,2}}{2}\sin 2(\theta' + \Phi_0) + \ldots$$

$$+\frac{R_{3,\,2n}}{2n}\sin 2n(\theta' + \Phi_0) + \frac{A_{3,\,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta' + \Phi_0). \quad (32)_3$$

Пользуясь ими, на основании уравнения (30), имеем

$$\int (p_1 - p_0)\sin\theta R\partial\theta = \frac{6\mu(U_0 - U_1)R^2c}{a^2}\int\Big[A_{1,\,0}\theta\sin\theta -$$

$$-A_{1,\,1}\cos(\theta - \Phi_0)\sin\theta + \frac{A_{1,\,2}}{2}\sin 2(\theta - \Phi_0)\sin\theta + \ldots$$

$$+\frac{A_{1,\,2n}}{2n}\sin 2n(\theta - \Phi_0)\sin\theta -$$

$$-\frac{A_{1,\,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\theta - \Phi_0)\sin\theta\Big]\partial\theta +$$

$$+\frac{6\mu(U_0 - U_1)R^2c}{a^2}S_1\int\sin\theta\partial\theta. \quad (33)$$

После интегрирования находим

$$\int (p_1 - p_0)\sin\theta R\partial\theta = \frac{6\mu(U_0 - U_1)R^2c}{a^2}\Big[A_{1,\,0}(\sin\theta - \theta\cos\theta) +$$

$$+\frac{A_{1,\,1}}{2}\left\{\cos^2\theta\cos\Phi_0 + \left(\frac{\sin 2\theta}{2} - \theta\right)\sin\Phi_0\right\} +$$

$$+\frac{A_{1,\,2}}{2\cdot 2}\left\{\sin(\theta - 2\Phi_0) - \frac{\sin(3\theta - 2\Phi_0)}{3}\right\} -$$

. . . .

$$-\frac{A_{1,\,2n+1}}{2(2n+1)}\left\{\frac{\cos[2n\theta-(2n+1)\Phi_0]}{2n}-\frac{\cos[(2n+2)\theta-(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}\right\}\Bigg]-$$

$$-\frac{6\mu(U_0-U_1)R^2c}{a^2}S_1\cos\theta+\mathrm{const}; \qquad (34)$$

интегрируя в пределах от $\theta=\theta'$ до $\theta=\theta_0$, получим

$$\int\limits_{\theta'}^{\theta_0}(p_1-p_0)\sin\theta R\partial\theta=\frac{6\mu(U_0-U_1)R^2c}{a}\Bigg[A_{1,\,0}(\sin\theta_0-\theta_0\cos\theta_0-$$

$$-\sin\theta'+\theta'\cos\theta')+\frac{A_{1,\,1}}{2}\Bigg\{(\cos^2\theta_0-\cos^2\theta')\cos\Phi_0+$$

$$+\left(\frac{\sin 2\theta_0}{2}-\theta_0-\frac{\sin 2\theta'}{2}+\theta'\right)\sin\Phi_0\Bigg\}+$$

$$+\frac{A_{1,\,2}}{2\cdot 2}\Bigg\{\sin(\theta_0-2\Phi_0)-\frac{\sin(3\theta_0-2\Phi_0)}{3}-$$

$$-\sin(\theta'-2\Phi_0)+\frac{\sin(3\theta'-2\Phi_0)}{3}\Bigg\}+$$

. . . .

$$+\frac{A_{1,\,2n}}{2n}\Bigg\{\frac{\sin[(2n-1)\theta_0-2n\theta_0]}{2n-1}-\frac{\sin[(2n+1)\theta_0-2n\Phi_0]}{2n+1}-$$

$$-\frac{\sin[(2n-1)\theta'-2n\Phi_0]}{2n-1}+\frac{\sin[(2n+1)\theta'-2n\Phi_0]}{2n+1}\Bigg\}-$$

$$-\frac{A_{1,\,2n+1}}{2(2n+1)}\Bigg\{\frac{\cos[2\ \theta_0-(2n+1)\Phi_0]}{2n}-\frac{\cos[2n+2)\theta_0-(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}-$$

$$-\frac{\cos[2n\theta'-(2n+1)\Phi_0]}{2n}+\frac{\cos[(2n+2)\theta'-(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}\Bigg\}\Bigg]-$$

$$-\frac{6\mu(U_0-U_1)R^2c}{a^2}S_1[\cos\theta_0-\cos\theta']. \qquad (35)_1$$

Рассматривая интеграл

$$\int\limits_{\theta_2'}^{\theta_{2,\,0}}(p_2-p_0)\sin\theta R\partial\theta,$$

при замене $p_2 - p_0$ вторым членом уравнения $(30)_2$ необходимо иметь в виду, что в это последнее входит угол α, связанный с углом θ соотношением

$$\theta = \pi + \alpha.$$

Следовательно

$$\sin\theta = -\sin\alpha, \quad \partial\theta = \partial\alpha, \quad \theta_2' = \pi - \alpha_1 \quad \text{и} \quad \theta_{2,0} = \pi + \alpha_1;$$

потому имеем

$$\int\limits_{\theta_2'}^{\theta_{2,0}} (p_2 - p_0)\sin\theta R\partial\theta = -\int\limits_{-\alpha_1}^{\alpha_1} (p_2 - p_0)\sin\alpha R\partial\alpha$$

и, следовательно, в силу уравнения (33), получим

$$\int\limits_{\theta_2'}^{\theta_{2,0}} (p_2 - p_0)\sin\theta R\partial\theta = \frac{6\mu(U_0 - U_1)R^2 c}{a^2} \times$$

$$\times\Bigg[A_{2,0}\{2\sin\alpha_1 - 2\alpha_1\cos\alpha_1\} + \frac{A_{2,1}}{2}\{\sin 2\alpha_1 - 2\alpha_1\}\sin\Phi_0 +$$

$$+\frac{A_{2,2}}{2\cdot 2}\Bigg\{\sin(\alpha_1 - 2\Phi_0) - \frac{\sin(3\alpha_1 - 2\Phi_0)}{3} -$$

$$-\sin(\alpha_1 + 2\Phi_0) + \frac{\sin(3\alpha_1 + 2\Phi_0)}{3}\Bigg\} +$$

. . . .

$$\frac{A_{2,2n}}{2\cdot 2n}\Bigg\{\frac{\sin[(2n-1)\alpha_1 - 2n\Phi_0]}{2n-1} - \frac{\sin[(2n+1)\alpha_1 - 2n\Phi_0]}{2n+1} -$$

$$-\frac{\sin[(2n-1)\alpha_1 + 2n\Phi_0]}{2n-1} + \frac{\sin[(2n+1)\alpha_1 + 2n\Phi_0]}{2n+1}\Bigg\} -$$

$$-\frac{A_{2,2n+1}}{2(2n+1)}\Bigg\{\frac{\cos[2n\alpha_1 - (2n+1)\Phi_0]}{2n} - \frac{\cos[(2n+2)\alpha_1 - (2n+1)\Phi_0]}{2n+2} -$$

$$-\frac{\cos[2n\alpha_1 + (2n+1)\Phi_0]}{2n} + \frac{\cos[(2n+2)\alpha_1 + (2n+1)\Phi_0]}{2n+2}\Bigg\}\Bigg]. \qquad (35)_2$$

Последний интеграл уравнения (21), содержащий гидродинамическое давление $p_3 - p_0$

$$\int_{\theta_3'}^{\theta_{3,0}} (p_3 - p_0) \sin\theta R\partial\theta,$$

может быть найден с помощью уравнения $(30)_3$. В этом последнем уравнении $p_3 - p_0$ выражено с помощью отрицательных углов, дополнительных к углам, находящимся под знаком интеграла. Подставляя эту функцию в $p_3 - p_0$, приходится рассматривать θ_1 под знаком sin и взять ∂ по отношению к дополнительному углу и вместо пределов θ_3' и $\theta_{3,0}$ поставить пределы дополнительного угла, именно: вместо θ_3' поставить -0_0 и вместо $\theta_{3,0}$ поставить $-6'$. В этом случае

$$\int_{\theta_3'}^{\theta_{3,0}} (p_3 - p_0) \sin\theta R\partial\theta = -\int_{-\theta'}^{-\theta_0} (p_3 - p_0) \sin\theta R\partial\theta.$$

Неопределенный интеграл второй части равенства отличается от формулы второго члена уравнения (34) только его коэффициентами. Поэтому, вводя пределы, получим

$$\int_{-\theta_3'}^{\theta_{3,0}} (p_3 - p_0) \sin\theta R\partial\theta = -\frac{6\mu(U_0 - U_1) R^2 c}{a^2} [A_{3,0}\{-\sin\theta_0 +$$

$$+ \theta_0 \cos\theta_0 + \sin\theta' - \theta' \sin\theta'\} + \frac{A_{3.1}}{2}\{(\cos^2\theta_0 - \cos^2\theta')\cos\Phi_0 +$$

$$+ \left(-\frac{\sin 2\theta}{3} + \theta_0 + \frac{\sin 2\theta'}{2} + \theta'\right)\sin\Phi_0\Big\} + \frac{A_{3,2}}{2\cdot 2}\{-\sin(\theta_0 + 2\Phi_0) +$$

$$+ \frac{\sin(3\theta_0 + 2\Phi_0)}{3} + \sin(\theta' + 2\Phi_0) - \frac{\sin(3\theta' + 2\Phi_0)}{3}\Big\} +$$

. . . .

$$+\frac{A_{3,2n}}{2\cdot 2n}\left\{-\frac{\sin[(2n-1)\theta_0+2n\Phi_0]}{2n-1}+\frac{\sin[(2n+1)\theta_0+2n\Phi_0]}{2n+1}-\right.$$
$$\left.-\frac{\sin[(2n-1)\theta'+2n\Phi_0]}{2n-1}-\frac{\sin[(2n+1)\theta'+2n\Phi_0]}{2n+1}\right\}-$$
$$-\frac{A_{3,2n+1}}{2(2n+1)}\left\{\frac{\cos[2n\theta_0+(2n+1)\Phi_0}{2n}-\frac{\cos[(2n+2)\theta_0+(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos[2n\theta'+(2n+1)\Phi_0]}{2n}+\frac{\cos[(2n+2)\theta'+(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}\right\}+$$
$$+\frac{6\mu(U_0-U_1)R^2c}{a^2}S_3[\cos\theta_0-\cos\theta']. \qquad (35)_3$$

Вторая группа интегралов уравнения (21) заключает в себе силы трения, выражение которых дано уравнениями (24); следовательно

$$-\int f_{1,x}R\cos\theta\partial\theta=\frac{\mu(U_0-U_1)R}{a}\int\{B_{1,0}+B_{1,1}\sin(\theta-\Phi_0)+$$
$$+B_{1,2}\cos 2(\theta-\Phi_0)+\ldots B_{1,2n}\cos 2n(\theta-\Phi_0)+$$
$$+B_{1,2n+1}\sin[(2n+1)(\theta-\Phi_0)]\}\cos\theta\partial\theta.$$

Произведя интегрирование, получим

$$-\int f_{1,x}R\cos\theta\,\partial\theta=\frac{\mu(U_0-U_1)R}{a}\left[B_{1,0}\sin\theta+\right.$$
$$+\frac{B_{1,1}}{2}\left\{\sin^2\theta\cos\Phi_0-\left(\frac{\sin 2\theta}{2}+\theta\right)\sin\Phi_0\right\}+$$
$$+\frac{B_{1,2}}{2}\left\{\frac{\sin(3\theta-2\Phi_0)}{3}+\sin(\theta-2\Phi_0)\right\}+$$

. . . .

$$+\frac{B_{1,2n}}{2}\left\{\frac{\sin[(2n+1)\theta-2n\Phi_0]}{2n+1}+\frac{\sin[(2n-1)\theta-2n\Phi_0]}{2n-1}\right\}-$$
$$-\frac{B_{1,2n+1}}{2}\left\{\frac{\cos[(2n+2)\theta-(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\cos[(2n+1)\Phi_0]}{2n}\right\}\right]+\text{const}. \qquad (36)$$

Этот же интеграл в пределах от θ' и θ_0 выражается следующим образом

$$
-\int_{\theta'}^{\theta_0} f_{1,x} R \cos\theta \partial\theta = \frac{\mu (U_0 - U_1) R}{a} \Big[B_{1,0} (\sin\theta_0 - \sin\theta') + \frac{B_{1,1}}{2}\Big\{(\sin^2\theta_0 - \sin^2\theta')\cos\Phi_0 - \Big(\frac{\sin 2\theta_0}{2} + \theta_0 - \frac{\sin 2\theta'}{2} - \theta'\Big)\sin\Phi_0\Big\} + \frac{B_{1,2}}{2}\Big\{\frac{\sin[3\theta_0 - 2\Phi_0]}{3} + \sin(\theta_0 - 2\Phi_0) - \frac{\sin[3\theta' - 2\Phi_0]}{3} - \sin(\theta' - 2\Phi_0)\Big\} + \ldots
$$

. . . .

$$
+ \frac{B_{1,2n}}{2}\Big\{\frac{\sin[(2n+1)\theta_0 - 2n\Phi_0]}{2n+1} + \frac{\sin[(2n-1)\theta_0 - 2n\Phi_0]}{2n-1} - \frac{\sin[(2n+1)\theta' - 2n\Phi_0]}{2n+1} - \frac{\sin[(2n+1)\theta' - 2n\Phi_0]}{2n-1}\Big\} - \frac{B_{1,2n+1}}{2}\Big\{\frac{\cos[(2n+2)\theta_0 - (2n+1)\Phi_0]}{2n+2} + \frac{\cos[2n\theta_0 - (2n+1)\Phi_0]}{2n} - \frac{\cos[(2n+2)\theta' - (2n+1)\Phi_0]}{2n+2} - \frac{\cos[2n\theta' - (2n+1)\Phi_0]}{2n}\Big\}\Big]. \quad (37)_1
$$

Второй интеграл этой же группы

$$
\int_{\theta_2'}^{\theta_{2,0}} f_{2,x} R \cos\theta \partial\theta = -\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} f_{2,x} R \cos\theta \partial\theta
$$

после замены $f_{2,x}$ вторым членом уравнения $(24)_2$ и после интегрирования дает выражение, которое отличается от второго члена уравнения (36) только индексом 2 вместо 1 в коэффициентах B.

Интегрирование в указанных пределах, следовательно, дает

$$\int\limits_{\theta_2'}^{\theta_{2,0}} f_{2,x} R \cos\theta\partial\theta = \frac{\mu(U_0 - U_1)R}{a}\Big[B_{2,0} 2\sin\alpha_1 -$$

$$- B_{2,1}\{\sin 2\alpha_1 + 2\alpha_1\}\sin\Phi_0 - \frac{B_{2,2}}{2}\left\{\frac{\sin(3\alpha_1 - 2\Phi_0)}{3} + \right.$$

$$\left. + \sin(\alpha_1 - 2\Phi_0) - \frac{\sin(3\alpha_1 + 2\Phi_0)}{3} - \sin(\alpha_1 + 2\Phi_0)\right\} +$$

. . . .

$$+ \frac{B_{2,2n}}{2}\left\{\frac{\sin[(2n+1)\alpha_1 - 2n\Phi_0]}{2n+1} + \frac{\sin[(2n-1)\alpha_1 - 2n\Phi_0]}{2n-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin[(2n+1)\alpha_1 + 2n\Phi_0]}{2n+1} - \frac{\sin[(2n-1)\alpha_1 + 2n\Phi_0]}{2n-1}\right\} +$$

$$+ \frac{B_{2,2n+1}}{2}\left\{\frac{\cos[(2n+2)\alpha_1 - (2n+1)\Phi_0]}{2n+2} + \frac{\cos[2n\alpha_1 - (2n+1)\Phi_0]}{2n} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos[(2n+2)\alpha_1 + (2n+1)\Phi_0]}{2n+2} - \frac{\cos[2n\alpha_1 + (2n+1)\Phi_0]}{2n}\right\}\Big]. \qquad (37)_2$$

Для вычисления последнего интеграла той же группы

$$\int\limits_{\theta_3'}^{\theta_{3,0}} f_{3,x} R \cos\theta\partial\theta$$

следует заменить углы, содержащиеся в этом интеграле, через их добавления. Если положить

$$\theta = 2\pi + \beta,$$

то очевидно, что

$$\cos\theta = \cos\beta \quad \text{и} \quad \partial\theta = \partial\beta.$$

Если внести в уравнение $(24)_3$ угол β, то получим формулу совершенно той же формы, но только по отношению к углу β,

и если под величиной β подразумеваются отрицательные углы, заключенные в пределах $-\theta'$ и $-\theta_0$, то мы видим, что

$$-\int_{\theta_3'}^{\theta_{3,0}} f_{3,x} R \cos\theta \partial\theta = \int_{-\theta'}^{-\theta_0} f_{3,x} R \cos\beta \partial\beta ;$$

этот последний интеграл легко определяется с помощью уравнения $(37)_1$, и таким образом получим

$$-\int_{\theta_3'}^{\theta_{3,0}} f_{3,x} R \cos\theta \partial\theta = -\frac{\mu (U_0 - U_1) R}{a} \left[B_{3,0} (-\sin\theta_0 + \sin\theta') + \right.$$

$$+ B_{3,1} \left\{ (\sin^2\theta_0 - \sin^2\theta') \cos\Phi_0 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sin 2\theta_0}{2} + \theta_0 - \frac{\sin 2\theta'}{2} - \theta' \right) \sin\Phi_0 \right\} + \frac{B_{3,2}}{2} \left\{ -\frac{\sin(3\theta_0 + 2\Phi_0)}{3} - \right.$$

$$\left. - \sin(\theta_0 + 2\Phi_0) + \frac{\sin(3\theta' + 2\Phi_0)}{3} + \sin(\theta' + 2\Phi_0) \right\} +$$

. . . .

$$+ \frac{B_{3,2n}}{2} \left\{ -\frac{\sin[(2n+1)\theta_0 + 2n\Phi_0]}{2n+1} - \frac{\sin[(2n-1)\theta_0 + 2n\Phi_0]}{2n-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin[(2n+1)\theta' + 2n\Phi_0]}{2n+1} + \frac{\sin[(2n-1)\theta' + 2n\Phi_0]}{2n-1} \right\} -$$

$$- \frac{B_{3,2n+1}}{2} \left\{ \frac{\cos[(2n+2)\theta_0 + (2n+1)\Phi_0]}{2n+2} + \frac{\cos[2n\theta_0 + (2n+1)\Phi_0]}{2n} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\cos[(2n+2)\theta' + (2n+1)\Phi_0]}{2n+2} - \frac{\cos[2n\theta' + (2n+1)\Phi_0]}{2n} \right\} \right]. \qquad (37)_3$$

b) Интегрирование уравнения (22)

В силу уравнений $(30)_1$ и $(32)_1$ можно написать

$$\int (p_1 - p_0) R \cos\theta \partial\theta = \frac{6\mu (U_0 - U_1) R^2 c}{a^2} \int \left[A_{1,0} \theta \cos\theta - \right.$$

$$- A_{1,1}\cos(\theta - \Phi_0)\cos\theta + \frac{A_{1,2}}{2}\sin 2(\theta - \Phi_0)\cos\theta +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{A_{1,2n}}{2n}\sin 2n(\theta - \Phi_0)\cos\theta - \frac{A_{1,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)\times$$

$$\times(\theta - \Phi_0)\cos\theta]\,\partial\theta + \frac{6\mu(U_0 - U_1)R^2c}{a^2}S_1\int\cos\theta\,\partial\theta.$$

По интегрировании находим

$$\int(p - p_0)R\cos\theta\,\partial\theta = \frac{6\mu(U_0 - U_1)R^2c}{a^2}\Big[A_{1,0}\{\theta\sin + \theta\cos\theta\} -$$

$$- \frac{A_{1,1}}{2}\left\{\sin^2\theta\sin\Phi_0 + \left(\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta\right)\cos\Phi_0\right\} -$$

$$- \frac{A_{1,2}}{2}\left\{\frac{\cos(3\theta - 2\Phi_0)}{2\cdot 3} + \frac{\cos(\theta - 2\Phi_0)}{2}\right\} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$- \frac{A_{1,2n}}{2n}\left\{\frac{\cos[(2n+1)\theta - 2n\Phi_0]}{2(2n+1)} + \frac{\cos[(2n-1)\theta - 2n\Phi_0]}{2(2n-1)}\right\} -$$

$$- \frac{A_{1,2n+1}}{2n+1}\left\{\frac{\sin[(2n+2)\theta - (2n+1)\Phi_0]}{2(2n+2)} + \frac{\sin[2n\theta - (2n+1)\Phi_0]}{2\cdot 2n}\right\}\Big] +$$

$$+ \frac{6\mu(U_0 - U_1)R^2c}{a^2}S_1\sin\theta + \text{const}. \qquad (38)$$

Взяв этот интеграл в пределах от θ' до θ_0, получим

$$\int_{\theta'_1}^{\theta_{1,0}}(p_1 - p_0)R\cos\theta\,\partial\theta = \frac{6\mu(U_1 - U_0)R^2c}{a^2}\Big[A_{1,0}\{\theta_0\sin\theta_0 +$$

$$+ \cos\theta_0 - \theta'\sin\theta' - \cos\theta'\} - \frac{A_{1,1}}{2}\Big\{\sin^2\theta_0\sin\Phi_0 +$$

$$+ \left(\frac{\sin 2\theta_0}{2} + \theta_0\right)\cos\Phi_0 - \sin^2\theta'\sin\Phi_0 - \left(\frac{\sin 2\theta'}{2} + \theta'\right)\cos\Phi_0\Big\} -$$

$$-\frac{A_{1,2}}{2}\left\{\frac{\cos(3\theta_0-2\Phi_0)}{3}+\cos(\theta_0-2\Phi_0)-\right.$$

. . . .

$$\left.-\frac{\cos(3\theta'-2\Phi_0)}{3}-\cos(\theta'-2\Phi_0)\right\}-\frac{A_{1,2n}}{2\cdot 2n}\left\{\frac{\cos[(2n+1)\theta_0-2n\Phi_0]}{2n+1}+\right.$$

$$+\frac{\cos[(2n-1)\theta_0-2n\Phi_0]}{2n-1}-\frac{\cos[(2n+1)\theta'-2n\Phi_0]}{2n+1}-$$

$$\left.-\frac{\cos[(2n-1)\theta'-2n\Phi_0]}{2n-1}\right\}-\frac{A_{1,2n+1}}{2(2n+1)}\left\{\frac{\sin[(2n+2)\theta_0-(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}+\right.$$

$$+\frac{\sin[2n\theta_0-(2n+1)\Phi_0]}{2n}-\frac{\sin[(2n+2)\theta'-(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}-$$

$$\left.\left.-\frac{\sin[2n\theta'-(2n+1)\Phi_0]}{2n}\right\}\right]+\frac{6\mu(U_0-U_1)R^2c}{a^2}S_1\{\sin\theta_0-\sin\theta'\}. \quad (38)_1$$

Чтобы найти

$$\int_{\theta'_2}^{\theta_{2,0}}(p_2-p_0)R\cos\theta\partial\theta,$$

надо в соответствии с уравнениями $(30)_2$ и $(32)_2$ заменить в уравнениях $(38)_1$ индекс 1 через индекс 2 в коэффициентах A и S и, кроме того, в силу равенств

$$\theta_0=\pi+\alpha_1 \quad \text{и} \quad \theta'=\pi-\alpha_1$$

подставить вместо θ_0 и θ' эти величины.

В этом случае

$$\int_{\theta'_2}^{\theta_{2,0}}(p_2-p_0)R\cos\theta\partial\theta=\frac{6\mu(U_0-U_1)R^2c}{a^2}\left[A_{2,0}2\alpha_1\sin\alpha-\right.$$

$$-\frac{A_{2,1}}{2}\{\sin 2\alpha_1+2\alpha_1\}\cos\Phi_0-\frac{A_{2,2}}{2\cdot 2}\left\{\frac{\cos(3\alpha_1-2\Phi_0)}{3}+\right.$$

$$\left.+\cos(\alpha_1-2\Phi_0)-\frac{\cos(3\alpha_1+2\Phi_0)}{3}-\cos(\alpha_1+2\Phi_0)\right\}$$

. . . .

$$-\frac{A_{2,\,2n}}{2\cdot 2n}\left\{\frac{\cos[(2n+1)\alpha_1-2n\Phi_0]}{2n+1}+\frac{\cos[(2n-1)\alpha_1-2n\Phi_0]}{2n-1}\right\}-$$

$$-\frac{A_{2\;2n+1}}{2(2n+1)}\left\{\frac{\sin[(2n+2)\alpha_1-(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}+\right.$$

$$+\frac{\sin[2n\alpha_1-(2n+1)\Phi_0]}{2n}-\frac{\sin[(2n+2)\alpha_1+(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}-$$

$$\left.\left.-\frac{\sin[2n\alpha_1-(2n+1)\Phi_0}{2n}\right\}\right]-\frac{6\mu(U_0-U_1)R^2c}{a^2}S_2\,2\sin\alpha_1. \qquad (38)_2$$

Для определения

$$\int_{\theta'_3}^{\theta_{3,0}}(p_3-p_0)R\cos\theta\partial\theta$$

надо снова положить

$$\theta=2\pi+\beta,$$

принимая за β углы, содержащиеся между $-\theta'$ и $-\theta_0$.

В этом случае

$$\cos\theta=\cos\beta, \qquad \partial\theta=\partial\beta$$

и

$$\int_{\theta'_3}^{\theta_{3,0}}(p_3-p_0)R\cos\theta\partial\theta=-\int_{-\theta'}^{-\theta_0}(p_3-p_0)R\cos\beta\partial\beta.$$

Этот последний интеграл определяем при помощи уравнения $(38)_1$, заменяя индекс 1 в коэффициентах A и S_1 через индекс 3 и ставя знак — вместо знака $+$ перед буквами θ_0 и θ'. Таким образом получим

$$\int_{\theta'_3}^{\theta_{3,0}}(p_3-p_0)R\cos\theta\partial\theta=-\frac{6\mu(U_0-U_1)R^2c}{a^2}\left[A_{3,\,0}\{\theta_0\sin\theta_0+\right.$$

$$+\cos\theta_0-\theta'\sin\theta'-\cos\theta'\}-\frac{A_{3,1}}{2}\Big\{\sin^2\theta_0\sin\Phi_0-$$

$$-\left(\frac{\sin 2\theta_0}{2}+\theta_0\right)\cos\Phi_0-\sin^2\theta'\sin\Phi_0+$$

$$+\left(\frac{\sin 2\theta'}{2}+\theta'\right)\cos\Phi_0-$$

$$-\frac{A_{3,2}}{2\cdot 2}\Big\{\frac{\cos(3\theta_0+2\Phi_0)}{3}+\cos(\theta_0+2\Phi_0)-$$

$$-\frac{\cos(3\theta'+2\Phi_0)}{3}-\cos(\theta'+2\Phi_0)\Big\}+$$

. . . .

$$-\frac{A_{3,2n}}{2\cdot 2n}\Big\{\frac{\cos[(2n+1)\theta_0+2n\Phi_0]}{2n+1}+\frac{\cos[(2n+1)\theta_0+2n\Phi_0]}{2n-1}-$$

$$-\frac{\cos[(2n+1)\theta'+2n\Phi_0]}{2n+1}-\frac{\cos[(2n-1)\theta'+2n\Phi_0]}{2n-1}\Big\}-$$

$$-\frac{A_{3,2n+1}}{2(2n+1)}\Big\{-\frac{\sin[(2n+2)\theta_0+(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}-$$

$$-\frac{\sin[2n\theta_0+(2n+1)\Phi_0]}{2n}+\frac{\sin[(2n+2)\theta'+(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}+$$

$$+\frac{\sin[2n\theta'+(2n+1)\Phi_0]}{2n}\Big\}\Big]+\frac{6\mu(U_0-U_1)R^2c}{a^2}S_3\times\{\sin\theta_0-\sin\theta'\}$$

$$(38)_3$$

Для определения второй группы интегралов уравнения (22) необходимо снова вернуться к уравнениям (24).

В силу (24) можно написать

$$\int f_{1,x}R\sin\theta\partial\theta=-\frac{\mu(U_0-U_1)R}{a}\int\Big\{B_{1,0}+B_{1,1}\sin(\theta-\Phi_0)+$$

$$+B_{1,2}\cos 2(\theta-\Phi_0)+\ldots+B_{1,2n}\cos 2n(\theta-\Phi_0)+$$

$$+B_{1,2n+1}\sin[(2n+1)\theta-\Phi_0]\Big\}\sin\theta\partial\theta\,.$$

Произведя интегрирования, указанные во второй части уравнения, имеем

$$\int f_{1,x} R \sin\theta\partial\theta = -\frac{\mu(U_0 - U_1)R}{a}\Big[-B_{1,0}\cos\theta -$$

$$-\frac{B_{1,1}}{2}\left\{\left(\frac{\sin 2\theta}{2} - \theta\right)\cos\Phi_0 - \cos^2\theta\sin\Phi_0\right\} -$$

$$-\frac{B_{1,2}}{2}\left\{\frac{\cos(3\theta - 2\Phi_0)}{3} - \cos(\theta - 2\Phi_0)\right\} +$$

. . . .

$$-\frac{B_{1,2n}}{2}\left\{\frac{\cos[(2n+1)\theta - 2n\Phi_0]}{2n+1} - \frac{\cos[(2n-1)\theta - 2n\Phi_0]}{2n-1}\right\} -$$

$$-\frac{B_{1,2n+1}}{2}\left\{\frac{\sin[(2n+2)\theta - (2n+1)\Phi_0]}{2n+2} -\right.$$

$$\left.-\frac{\sin[2n\theta - (2n+1)\Phi_0]}{2n}\right\}\Big] + \text{const.} \qquad (39)$$

Взяв этот интеграл между пределами θ' и θ_0, получим

$$\int_{\theta'_1}^{\theta_{1,0}} f_{1,x} R\sin\theta\partial\theta = \frac{\mu(U_0 - U_1)R}{a}\Big[B_{1,0}(\cos\theta_0 - \cos\theta') +$$

$$+\frac{B_{1,1}}{2}\left\{\left(\frac{\sin 2\theta_0}{2} - \theta_0\right)\cos\Phi_0 - \cos^2\theta_0\sin\Phi_0 -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\sin 2\theta'}{2} - \theta_0\right)\cos\Phi_0 + \cos^2\theta'\sin\Phi_0\right\} +$$

$$+\frac{B_{1,2}}{2}\left\{\frac{\cos(3\theta_0 - 2\Phi_0)}{3} - \cos(\theta - 2\Phi_0) -\right.$$

$$\left.-\frac{\cos(3\theta' - 2\Phi_0)}{3} + \cos(\theta' - 2\Phi_0)\right\} +$$

. . . .

$$+\frac{B_{1,2n}}{2}\left\{\frac{\cos[(2n+1)\theta_0 - 2n\Phi_0]}{2n+1} - \frac{\cos[(2n-1)\theta_0 - 2n\Phi_0]}{2n-1} -\right.$$

$$-\frac{\cos[(2n+1)\theta'-2n\Phi_0]}{2n+1}+\frac{\cos[(2n-1)\theta'-2n\Phi_0]}{2n-1}\Bigg\}+$$

$$+\frac{B_{1,2n+1}}{2}\Bigg\{\frac{\sin[(2n+2)\theta_0-(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}-\frac{\sin[2n\theta_0-(2n+1)\Phi_0]}{2n}-$$

$$-\frac{\sin[(2n+2)\theta'-(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}+\frac{\sin[2n\theta'-(2n+1)\Phi_0]}{2n}\Bigg\}\Bigg]. \quad (39)_1$$

Второй интеграл этой группы будет

$$\int_{\theta'_2}^{\theta_{2,0}} f_{2,x} R\sin\theta\partial\theta=\int_{\pi-\alpha_1}^{\pi+\alpha_1} f_{2,x} R\sin\theta\partial\theta.$$

Этот интеграл вычисляем при помощи уравнения $(39)_1$, заменяя у коэффициентов B индекс 1 через индекс 2 и подставляя $\pi+\alpha_1$ вместо θ_0 и $\pi-\alpha_1$ вместо θ'. Отсюда имеем

$$\int_{\theta'_2}^{\theta_{2,0}} f_{2,x} R\sin\theta\partial\theta=\frac{\mu(U_0-U_1)R}{a}\Bigg[\frac{B_{2,1}}{2}(\sin 2\alpha_1-2\alpha_1)\cos\Phi_0+$$

$$+\frac{B_{2,2}}{2}\Bigg\{\frac{\cos(3\alpha_1-2\Phi_0)}{3}-\cos(\alpha_1-2\Phi_0)-$$

$$-\frac{\cos(3\alpha_1+2\Phi_0)}{3}+\cos(\alpha_1+2\Phi_0)\Bigg\}+$$

. . . .

$$+\frac{B_{2,2n}}{2}\Bigg\{\frac{\cos[(2n+1)\alpha_1-2n\Phi_0]}{2n+1}-\frac{\cos[(2n-1)\alpha_1-2n\Phi_0]}{2n-1}+$$

$$+\frac{B_{2,2n+1}}{2}\Bigg\{\frac{\sin[(2n+2)\alpha_1-(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}-\frac{\sin[2n\alpha_1-(2n+1)\Phi_0]}{2n}+$$

$$+\frac{\sin[(2n+2)\alpha_1+(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}-\frac{\sin[2n\alpha_1+(2n+1)\Phi_0]}{2n}\Bigg\}\Bigg]. \quad (39)_2$$

Наконец, интеграл

$$\int_{\theta'_3}^{\theta_{3,0}} f_{3,x} R\sin\theta\partial\theta$$

легко получается, полагая

$$\theta = 2\pi + \beta,$$

откуда

$$\sin\theta = \sin\beta \quad \text{и} \quad \partial\theta = \partial\beta,$$

если β обозначает углы, заключенные между $-\theta'$ и $-\theta'_0$, и, следовательно, имеем

$$\int_{\theta'_3}^{\theta_{3,0}} f_{3,x} R \sin\theta\partial\theta = -\int_{-\theta'}^{-\theta_0} f_{3,x} R \sin\beta\partial\beta.$$

Этот интеграл получаем при помощи уравнения (39), заменяя у коэффициентов B индекс 1 через индекс 3 и ставя знак $-$ вместо знака $+$ перед углами θ и θ'. Таким образом получим

$$\int_{\theta'_3}^{\theta_{3,0}} f_{3,x} R \sin\theta\partial\theta = -\frac{\mu(U_0-U_1)R}{a}\Bigg[B_{3,0}(\cos\theta_0 - \cos\theta') +$$

$$+\frac{B_{3,1}}{2}\left\{-\left(\frac{\sin 2\theta_0}{2} - \theta_0\right)\cos\Phi_0 - \cos^2\theta_0 \sin\Phi_0 +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sin 2\theta'}{2} - \theta'\right)\cos\Phi_0 + \cos^2\theta' \sin\Phi_0\right\} +$$

$$+\frac{B_{3,2}}{2}\left\{\frac{\cos(3\theta_0 + 2\Phi_0)}{3} - \cos(\theta_0 + 2\Phi_0) -\right.$$

$$\left. - \frac{\cos(3\theta' - 2\Phi_0)}{3} + \cos(\theta' + 2\Phi_0)\right\} +$$

. . . .

$$+\frac{B_{3,2n}}{2}\left\{\frac{\cos[(2n+1)\theta_0 + 2n\Phi_0]}{2n+1} - \frac{\cos[(2n-1)\theta_0 + 2n\Phi_0]}{2n-1} -\right.$$

$$- \frac{\cos[(2n+1)\theta' + 2n\Phi_0]}{2n+1} + \frac{\cos[(2n-1)\theta' + 2n\Phi_0]}{2n-1} +$$

$$+\frac{B_{3,2n+1}}{2}\left\{-\frac{\sin[(2n+2)\theta_0+(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}-\right.$$
$$-\frac{\sin[2n\theta_0+(2n+1)\Phi_0]}{2n}+\frac{\sin[(2n+2)\theta'+(2n+1)\Phi_0]}{2n+2}-$$
$$\left.\left.-\frac{\sin[2n\theta'+(2n+1)\Phi_0)]}{2n}\right\}\right]. \qquad (39)_3$$

c) Интегрирование уравнения (23)

В силу уравнения (24) имеем

$$\int f_{1,x}R^2\partial\theta=-\frac{\mu(U_0-U_1)R^2}{a}\int\{B_{1,0}+B_{1,1}\sin(\theta-\Phi_0)+$$
$$+B_{1,2}\cos(\theta-\Phi_0)+\ldots+B_{1,2n}\cos 2n(\theta-\Phi_0)+$$
$$+B_{1,2n+1}\sin[(2n+1)\theta-\Phi_\theta)\}\partial\theta;$$

взяв эти интегралы в пределах от θ_0 и до θ', найдем

$$\int_{\theta'_1}^{\theta_{1,0}} f_{1,x}R^2\partial\theta=-\frac{\mu(U_0-U_1)R^2}{a}\Big[B_{1,0}(\theta_0-\theta')-$$
$$-B_{1,1}\{(\cos\theta_0-\cos\theta')\cos\Phi_0+(\sin\theta_0-\sin\theta')\sin\Phi_0\}+$$
$$+\frac{B_{1,2}}{2}\Big\{(\sin 2\theta_0-\sin 2\theta')\cos 2\Phi_0-(\cos\theta_0-\cos\theta')\sin 2\Phi_0+$$

. . . .

$$+\frac{B_{1,2n}}{2}\{(\sin 2n\theta_0-\sin 2n\theta')\cos 2n\Phi_0-$$
$$-(\cos 2n\theta_0-\cos 2n\theta')\sin 2n\Phi_0\}+$$
$$+\frac{B_{1,2n+1}}{2}\{[\cos(2n+1)\theta_0-\cos(2n+1)\theta']\cos(2n+1)\Phi_0+$$
$$+[\sin(2n+1)\theta_0-\sin(2n+1)\theta']\sin(2n+1)\Phi_0\}\Big]. \qquad (40)_1$$

Также имеем

$$\int_{\theta'_2}^{\theta_{2,0}} f_{2,x} R^2 \partial\theta = -\frac{\mu(U_0-U_1)R^2}{a}\Big[B_{2,0}\cdot 2\alpha - B_{2,1}\sin\alpha_1\sin\Phi_0 +$$

$$+\frac{B_{2,2}}{2}\cdot 2\sin 2\alpha_1\cos 2\Phi_0 +$$

. . . .

$$+\frac{B_{2,2n}}{2n}2\sin 2n\alpha_1\cos 2n\Phi_0 -$$

$$-\frac{B_{2,2n+1}}{2n+1}2\sin(2n+1)\alpha_1\sin(2n+1)\Phi_0\Big] \qquad (40)_2$$

и, наконец,

$$\int_{\theta'_3}^{\theta_{3,0}} f_{3,x} R^2 \partial\theta = -\frac{\mu(U_0-U_1)R^2}{a}\Big[B_{3,0}(\theta_0-\theta')+$$

$$+B_{3,1}\{(\cos\theta_0-\cos\theta')\cos\Phi_0-(\sin\theta_0-\sin\theta')\sin\Phi_0\}+$$

$$+\frac{B_{3,2}}{2}\{(\sin 2\theta_0-\sin 2\theta')\cos 2\Phi_0+$$

$$+(\cos 2\theta_0-\cos 2\theta')\sin 2\Phi_0\}+$$

. . . .

$$+\frac{B_{3,2n}}{2n}\{(\sin 2n\theta_0-\sin 2n\theta')\cos 2\Phi_0+$$

$$+(\cos 2n\theta_0-\cos 2n\theta')\sin 2n\Phi_0\}+$$

$$+\frac{B_{3,2n+1}}{2n+1}\{[\cos(1n+1)\theta_0-\cos(2n+1)\theta']\cos(2n+1)\Phi_0-$$

$$-[\sin(2n+1)\theta_0-\sin(2n+1)\theta']\sin(2n+1)\Phi_0\}]. \qquad (40)_3$$

d) Окончательная форма уравнений равновесия

Подставляя вторые члены уравнений (32), (35), (37), (38), (39) и (40) в уравнения (21), (22) и (23) получают уравнения

равновесия без знаков интеграла; но для некоторого упрощения формул и облегчения вычислений следует выделить члены, содержащие множителями sin и cos кратных дуг Φ_0. Произведя указанную операцию в уравнении (21), получаем:

$$0=\frac{6Rc}{a}\Big\{(A_{1,0}+A_{3,0})(\sin\theta_0-\theta_0\cos\theta_0-\sin\theta'+\theta'\cos\theta')+$$

$$+\frac{A_{1,1}-A_{3,1}}{2}(\cos^2\theta_0-\cos^2\theta')\cos\Phi_0+$$

$$+\frac{A_{1,1}+A_{3,1}}{2}\left(\frac{\sin 2\theta_0}{2}-\theta_0-\frac{\sin 2\theta'}{2}+\theta'\right)\sin\Phi_0+$$

$$+\frac{A_{1,2}+A_{3,2}}{2\cdot 2}\left(\sin\theta_0-\sin\theta'-\frac{\sin 3\theta_0}{3}+\frac{\sin 3\theta'}{3}\right)\cos 2\Phi_0-$$

$$-\frac{A_{1,2}-A_{1,3}}{2\cdot 2}\left(\cos\theta_0-\cos\theta'-\frac{\cos 3\theta_0}{3}+\frac{\cos 3\theta'}{3}\right)\sin 2\Phi_0+$$

. . . .

$$+\frac{A_{1,2n}+A_{3,2n}}{2\cdot 2n}\left(\frac{\sin(2n-1)\theta_0}{2n-1}-\frac{\sin(2n-1)\theta'}{2n-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin(2n+1)\theta_0}{2n+1}+\frac{\sin(2n+1)\theta'}{2n+1}\right)\cos 2n\Phi_0-$$

$$-\frac{A_{1,2n}-A_{3,2n}}{2\cdot 2n}\left(\frac{\cos(2n-1)\theta_0}{2n-1}-\frac{\cos(2n-1)\theta'}{2n-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{\cos(2n+1)\theta_0}{2n+1}+\frac{\cos(2n+1)\theta'}{2n+1}\right)\sin 2n\Phi_0-$$

$$-\frac{A_{1,2n+1}+A_{3,2n+1}}{2(2n+1)}\left(\frac{\cos 2n\theta_0}{2n}-\frac{\cos 2n\theta'}{2n}-\frac{\cos(2n+2)\theta_0}{2n+2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos(2n+2)\theta'}{2n+2}\right)\cdot\cos(2n+1)\Phi_0-$$

$$-(\cos\theta_0-\cos\theta')[-(A_{1,0}+A_{3,0})\theta'+(A_{1,1}-A_{3,1})\cos\theta'\cos\Phi_0+$$

$$+(A_{1,1}+A_{3,1})\sin\theta'\sin\Phi_0-\frac{A_{1,2}+A_{3,2}}{2}\sin 2\theta'\cos 2\Phi_0+$$

$$+\frac{A_{1,2}-A_{3,2}}{2}\cos 2\theta'\sin 2\Phi_0 -$$

. . . .

$$-\frac{A_{1,2n}+A_{3,2n}}{2n}\sin 2n\theta'\cos 2n\Phi_0 +$$

$$+\frac{A_{1,2n}-A_{3,2n}}{2n}\cos 2n\theta'\sin 2n\,\Phi_0 +$$

$$+\frac{A_{1,2n+1}-A_{3,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)\,\theta'\cos(2n+1)\,\Phi_0 +$$

$$+\frac{A_{1,2n+1}+A_{3,2n+1}}{2n+1}\sin(2n+1)\,\theta'\sin(2n+1)\,\Phi_0]\Big\} +$$

$$+(B_{1,0}+B_{3,0})(\sin\theta_0-\sin\theta') +$$

$$+\frac{B_{1,1}-B_{3,1}}{2}(\sin^2\theta_0-\sin^2\theta')\cos\Phi_0 -$$

$$-\frac{B_{1,1}+B_{3,1}}{2}\left(\sin\frac{2\theta_0}{2}-\sin\frac{2\theta'}{2}+\theta_0-\theta'\right)\sin\Phi_0 +$$

$$+\frac{B_{1,2}+B_{3,2}}{2}\left(\frac{\sin 3\theta_0}{3}-\frac{\sin 3\theta'}{3}+\sin\theta_0-\sin\theta'\right)\cos 2\Phi_0 -$$

$$-\frac{B_{1,2}-B_{3,2}}{2}\left(\frac{\cos 3\theta_0}{3}-\frac{\cos 3\theta'}{3}+\cos\theta_0-\cos\theta'\right)\sin 2\Phi_0 + \ldots$$

$$+\frac{B_{1,2n}+B_{3,2n}}{2}\left(\frac{\sin(2n+1)\,\theta_0}{2n+1}-\frac{\sin(2n+1)\,\theta'}{2n+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin(2n-1)\,\theta_0}{2n-1}-\frac{\sin(2n-1)\,\theta'}{2n-1}\right)\cos 2n\Phi_0 -$$

$$-\frac{B_{1,2n+1}+B_{3,2n+1}}{2}\left(\frac{\sin(2n+2)\,\theta_0}{2n+2}-\frac{\sin(2n+2)\,\theta'}{2n+2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin 2n\theta_0}{2}-\frac{\sin 2n\theta'}{2n}\right)\sin(2n+1)\,\Phi_0 +$$

$$+\frac{6Rc}{a}\Big[A_{2,0}2(\sin\alpha_1-\alpha\cos\alpha_1)-\frac{A_{2,1}}{2}(\sin 2\alpha_1-2\alpha_1)\sin\Phi_0 -$$

$$-\frac{A_{2,2}}{2}(\cos 3\alpha_1-\cos 3\alpha_1)\sin 2\Phi_0 + \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{A_{2,\,2n}}{2n}\{\cos(2n-1)\alpha_1-\cos(2n+1)\alpha_1\}\sin 2n\,\Phi_0-$$

$$-\frac{A_{2,\,2n+1}}{2n+1}\{\sin 2n\alpha_1-\sin(2n+2)\alpha_1\}\sin(2n+1)\,\Phi_0]+$$

$$+B_{2,\,0}\,2\sin\alpha_1-B_{2,\,1}(\sin 2\alpha_1+2\alpha_1)\sin\Phi_0-$$

$$-B_{2,\,2}(\cos 3\alpha_1+\cos\alpha_1)\sin 2\Phi_0+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-B_{2,\,2n}[\cos(2n+1)\alpha_1+\cos(2n-1)\alpha_1]\sin 2n\Phi_0+$$

$$+B_{2,\,2n+1}[\sin(2n+2)\alpha_1+\sin 2n\alpha_1]\sin(2n+1)\,\Phi_0. \quad (41)$$

Если нет нижнего подшипника, то $\alpha_1=0$. В этом случае все члены уравнения (41), содержащие угол α_1, обратятся в нуль и исчезнут; если, кроме того, две верхние части подшипника сливаются, как было отмечено в § 8, то получается равенство коэффициентов

$$A_{1,\,i}=A_{3,\,i}$$

и в то же время угол $\theta'=0$.

В этом частном случае, разобранном Осборном Рейнольдсом, в уравнении (41) уничтожаются члены, содержащие множитель θ' или $\sin n\,\theta'$ и, кроме того, все члены, умноженные на одну из разностей $A_{1,\,i}-A_{3,\,i}$ или $B_{1,\,i}-B_{3,\,i}$.

На основании равенства

$$A_{1,\,i}=A_{3,\,i} \quad \text{и} \quad B_{1,\,i}=B_{3,\,i}$$

следует, что нет различия между коэффициентами с индексом 1 и коэффициентами с индексом 3 и, следовательно, достаточно рассматривать только вторые индексы. Поэтому можно написать

$$A_{1,\,i}+A_{3,\,i}=2A_i, \qquad B_{1,\,i}+B_{3,\,i}=2B_i.$$

В силу этих замечаний можно значительно упростить уравнение (41) и представить его в виде

$$0=\frac{6Rc}{a}\left\{2A_0(\sin\theta_0-\theta_0\cos\theta_0)+A_1\left(\frac{\sin 2\theta_0}{2}-\theta_0\right)\sin\Phi_0-\right.$$

$$-\frac{A_2}{2}\left(\sin\frac{3\theta_0}{3}-\sin\theta_0\right)\cos 2\Phi_3-$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\frac{A_{2n}}{2n}\left(\frac{\sin(2n+1)\theta_0}{2n+1}-\frac{\sin(2n-1)}{2n-1}\right)\cos 2n\Phi_0+$$

$$\left.+\frac{A_{2n+1}}{2n+1}\left(\frac{\sin(2n+2)\theta_0}{2n+2}-\frac{\sin 2n\theta_0}{2n}\right)\sin(2n+1)\Phi_0\right\}+$$

$$+2B_0\sin\theta_0-B_1\left(\frac{\sin 2\theta_0}{2}+\theta_0\right)\sin\Phi_0+B_2\left(\frac{\sin 3\vartheta_0}{3}+\sin\theta_0\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos 2\Phi^0+B_{2n}\left(\frac{\sin(2n+1)\theta_0}{2n+1}+\frac{\sin(2n-1)\theta_0}{2n-1}\right)\cos 2n\Phi_0$$

$$-B_{2n+1}\left(\frac{\sin(2n+2)\theta_0}{2n+2}+\frac{\sin 2n\theta_0}{2n}\right)\sin(2n+1)\Phi_0. \qquad (42)$$

Это уравнение тождественно с уравнением, указанным в мемуаре Осборна Рейнольдса под № 66.

В уравнении (22), заменяя интегралы через вторые части равенств (38) и (39), получим новую форму уравнения

$$\frac{L}{R}=\frac{6\mu(U_0-U_1)Rc}{a^2}\left[(A_{1,0}-A_{3,0})\{\theta_0\sin\theta_0+\cos\theta_0-\right.$$

$$-\theta'\sin\theta'-\cos\theta'\}-\frac{A_{1,1}+A_{3,1}}{2}\left\{\frac{\sin 2\theta_0}{2}+\theta_0-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin 2\theta'}{2}-\theta'\right\}\cos\Phi_0-\frac{A_{1,1}-A_{3,1}}{2}\{\sin^2\theta_0-\sin^2\theta'\}\sin\Phi_0+$$

$$-\frac{A_{1,2}-A_{3,2}}{2\cdot 2}\left\{\frac{\cos 3\theta_0}{3}+\cos\theta_0-\frac{\cos 3\theta'}{3}-\cos\theta'\right\}\cos 2\Phi_0-$$

$$-\frac{A_{1,2}+A_{3,2}}{2\cdot 2}\left\{\frac{\sin 3\theta_0}{3}+\sin\theta_0-\frac{\sin 3\theta'}{3}-\sin\theta\right\}\sin 2\Phi_0.+$$

. . . .

$$-\frac{A_{1,2n}+A_{3,2n}}{2\cdot 2n}\left\{\frac{\cos(2n+1)\theta_0}{2n+1}+\frac{\cos(2n-1)\theta_0}{2n-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{\cos(2n+1)\theta'}{2n+1}-\frac{\cos(2n-1)\theta'}{2n-1}\right\}\cos 2n\,\Phi_0-$$

$$-\frac{A_{1,2n}+A_{3,2n}}{2\cdot 2n}\left\{\frac{\sin(2n+1)\theta_0}{2n+1}+\frac{\sin(2n-1)\theta_0}{2n-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin(2n+1)\theta'}{2n+1}-\frac{\sin(2n-1)\theta'}{2n-1}\right\}\sin 2n\,\Phi_0-$$

$$-\frac{A_{1,2n+1}+A_{3,2n+1}}{2(2n+1)}\left\{\frac{\sin(2n+2)\theta_0}{2n+2}+\frac{\sin 2n\theta_0}{2n}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin(2n+2)\theta'}{2n+2}-\frac{\sin 2n\theta'}{2n}\right\}\cos(2n+1)\Phi_0+$$

$$+\frac{A_{1,2n+1}-A_{3,2n+1}}{2(n+1)}\left\{\frac{\cos(2n+2)\theta_0}{2n+2}+\frac{\cos 2n\theta_0}{2n}-\right.$$

$$\left.-\frac{\cos(2n+2)\theta'}{2n+2}-\frac{\cos 2n\theta'}{2n}\right\}\sin(2n+1)\Phi_0+$$

$$+(\sin\theta_0-\sin\theta')\{-(A_{1,0}-A_{3,0})\theta'+$$

$$+(A_{1,1}+A_{3,1})\cos\theta'\cos\Phi_0+(A_{1,1}-A_{3,1})\sin\theta\sin\Phi_0-$$

$$-\frac{A_{1,2}-A_{3,2}}{2}\sin 2\theta'\cos 2\Phi_0+\frac{A_{1,2}+A_{3,2}}{2}\cos 2\theta'\sin 2\Phi_0+$$

. . . .

$$-\frac{A_{1,2n}-A_{3,2n}}{2n}\sin 2n\theta'\cos 2n\Phi_0+$$

$$+\frac{A_{1,2n}+A_{3,2n}}{2n}\cos 2n\theta'\sin 2n\Phi_0+$$

$$+\frac{A_{1,2n+1}+A_{3,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)\theta'\cos(2n+1)\Phi_0+$$

$$+\frac{A_{1,\,2n+1}-A_{3,\,2n+1}}{2n+1}\sin(2n+1)\,\theta'\sin(2n+1)\,\Phi_0\Big\}\Big]+$$

$$+\frac{\mu(U_0-U_1)}{a}\Big[(B_{1,\,0}-B_{3,\,0})(\cos\theta_0-\cos\theta')+$$

$$+\frac{B_{1,\,1}+B_{3,\,1}}{2}\left\{\frac{\sin 2\theta_0}{2}-\theta_0-\frac{\sin 2\theta'}{2}+\theta'\right\}\cos\Phi_0-$$

$$-\frac{B_{1,\,1}-B_{3,\,1}}{2}\{\cos^2\theta_0-\cos^2\theta'\}\sin\Phi_0+$$

$$+\frac{B_{1,\,2}-B_{3,\,2}}{2}\left\{\frac{\cos 3\theta_0}{3}-\cos\theta_0-\frac{\cos 3\theta'}{3}+\cos\theta'\right\}\cos 2\Phi_0+$$

$$+\frac{B_{1,\,2}+B_{3,\,2}}{2}\left\{\frac{\sin 3\theta_0}{3}-\sin\theta_0-\frac{\sin 3\theta'}{3}+\sin\theta'\right\}\sin 2\Phi_0+$$

. . . .

$$+\frac{B_{1,\,2n}-B_{3,\,2n}}{2}\left\{\frac{\cos(2n+1)\,\theta_0}{2n+1}-\frac{\cos(2n-1)\,\theta_0}{2n-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{\cos(2n+1)\,\theta'}{2n+1}+\frac{\cos(2n-1)\,\theta'}{2n-1}\right\}\cos 2n\Phi_0+$$

$$+\frac{B_{1,\,2n}+B_{3,\,2n}}{2}\left\{\frac{\sin(2n+1)\,\theta_0}{2n+1}-\frac{\sin(2n-1)\,\theta_0}{2n-1}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin(2n+1)\,\theta'}{2n+1}+\frac{\sin(2n-1)\,\theta'}{2n-1}\right\}+$$

$$+\frac{B_{1,\,2n+1}+B_{3,\,2n+1}}{2}\left\{\frac{\sin(2n+1)\,\theta_0}{2n+1}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin(2n-1)\,\theta_0}{2n+1}+\frac{\sin(2n-1)\,\theta'}{2n-1}\right\}\sin 2n\Phi_0+$$

$$+\frac{B_{1,\,2n+1}+B_{3,\,2n+1}}{2}\left\{\frac{\sin(2n+2)\,\theta_0}{2n+2}-\frac{\sin 2n\theta_0}{2n}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sin(2n+2)\,\theta'}{2n+2}+\frac{\sin 2n\theta'}{2n}\right\}\cos(2n+1)\,\Phi_0-$$

$$-\frac{B_{1,\,2n+1}-B_{3,\,2n+1}}{2}\left\{\frac{\cos(2n+2)\,\theta_0}{2n+2}-\frac{\cos 2n\theta_0}{2n}-\right.$$

$$-\frac{\cos(2n+2)\theta'}{2n+2}-\frac{\cos 2n\theta'}{2n}\Big\}\sin(2n+1)+$$

$$+\frac{6\mu(U_0-U_1)Rc}{a^2}\Bigg[A_{2,0}\,2\alpha_1\sin\alpha-\frac{A_{2,1}}{2}(\sin 2\alpha_1+2\alpha_1)\cos\Phi_0-$$

$$-\frac{A_{2,2}}{2}\left(\frac{\sin 3\alpha}{3}+\sin\alpha_1\right)\sin 2\Phi_0+$$

. . . .

$$-\frac{A_{2,2n}}{2n}\{\sin(2n+1)\alpha_1+\sin(2n-1)\alpha_1\}\sin 2n\,\Phi_0+$$

$$+\frac{A_{2,2n+1}}{2n+1}\{\sin(2n+2)\alpha_1+\sin 2n\alpha_1\}\cos(2n+1)\,\Phi_0+$$

$$+2\sin\alpha_1\Big\{A_{2,0}\alpha_1-A_{2,1}\cos(\alpha_1-\Phi_0)+\frac{A_{2,2}}{2}\sin 2(\alpha_1-\Phi_0)+$$

. . . .

$$+\frac{A_{2,2n}}{2n}\sin 2n(\alpha_1-\Phi_0)+\frac{A_{2,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\alpha_1-\Phi_0)\Big\}\Bigg]+$$

$$+\frac{\mu(U_0-U_1)}{a}\Bigg[\frac{B_{2,1}}{2}(\sin 2\alpha_1-2\alpha_1)\cos\Phi_0+$$

$$+B_{2,2}\left\{\left(\frac{\sin 3\alpha}{3}+\sin\alpha_1\right)\sin 2\Phi_0+\ldots\right\}-$$

$$-B_{2,2n}\left\{\frac{\sin(2n+1)\alpha_1}{2n+1}+\frac{\sin(2n-1)\alpha_1}{2n-1}\right\}\sin 2n\,\Phi_0+$$

$$+B_{2,2n+1}\{\sin(2n+2)\alpha_1-\sin 2n\alpha_1\}\cos(2n+1)\,\Phi_0\Bigg]. \quad (43)$$

При отсутствии нижнего подшипника, когда $\alpha_1=0$, все члены, содержащие α_1, сделаются нулями. Если, кроме того, две верхние части подшипника совпадают, что выражается условием $\theta'=0$, то все члены, содержащие θ' или $\sin n\,\theta'$, пропадают. В этом случае, как было объяснено в § 8, имеются равенства

$$A_{1,i}=A_{3,i}$$

и

$$B_{1,i}=B_{3,i};$$

отсюда все члены, содержащие коэффициенты

$$A_{1,i}-A_{3,i} \quad \text{или} \quad B_{1,i}-B_{3,i},$$

пропадают.

После приведения в уравнении (43) всех членов, которые исчезают и отбросив в коэффициентах A и B сделавшийся ненужным первый индекс 1, это уравнение примет форму

$$\frac{L}{R}\frac{6\mu(U_0-U_1)Rc}{a^2}\Bigg[-A_1\left\{\frac{\sin 2\theta_0}{2}+\theta_0\right\}\cos\Phi_0-$$
$$-\frac{A_2}{2}\left\{\frac{\sin 3\theta_0}{3}+\sin\theta_0\right\}\sin 2\Phi_0+\ldots$$
$$-\frac{A_{2n}}{2n}\left\{\frac{\sin(2n+1)\theta_0}{2n+1}+\frac{\sin(2n-1)\theta_0}{2n-1}\right\}\sin 2n\Phi_0-$$
$$-\frac{A_{2n+1}}{2n+1}\left\{\frac{\sin(2n+2)\theta_0}{2n+2}+\frac{\sin 2n\theta_0}{2n}\right\}\cos(2n+1)\Phi_0+$$
$$+\sin\theta_0\Bigg\{2A_1\cos\Phi_0+\frac{2A_2}{2}\sin 2\Phi_0+\ldots$$
$$+\frac{2A_2}{2}\sin 2n\Phi_0+\frac{2A_{2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)\Phi_0\Bigg\}\Bigg]+$$
$$+\frac{\mu(U_0-U_1)}{a}\Bigg[B_1\left\{\frac{\sin 2\theta_0}{2}-\theta_0\right\}\cos\Phi_0+$$
$$+B_2\left\{\frac{\sin 3\theta_0}{3}-\sin\theta_0\right\}\sin 2\Phi_0+\ldots$$
$$+B_{2n}\left\{\frac{\sin(2n+1)\theta_0}{2n+1}-\frac{\sin(2n-1)\theta_0}{2n-1}\right\}\sin 2n\Phi_0+$$
$$+B_{2n+1}\left\{\frac{\sin(2n+2)\theta_0}{2n+2}-\frac{\sin 2n\theta_0}{2n}\right\}\cos(2n+1)\Phi_0\Bigg]. \quad (44)$$

Это уравнение соответствует уравнению (67) мемуара О. Рейнольдса, но оно не тождественно с ним вследствие ошибки,

которая обнаружилась в вычислениях этого автора. Детальные указания относительно этой ошибки находятся далее, в § 20.

Наконец, внося в уравнение (23) вторые части уравнений (40), мы получим последнее уравнение равновесия подшипника

$$\frac{M}{R} = -\frac{\mu(U_0 - U_1)R}{a}\Big[(B_{1,0} + B_{3,0})(\theta_0 - \theta') -$$

$$-(B_{1,1} - B_{3,1})(\cos\theta_0 - \cos\theta')\cos\Phi_0 -$$

$$-(B_{1,1} + B_{3,1})(\sin\theta_0 - \sin\theta')\sin\Phi_0 +$$

$$+\frac{B_{1,2} + B_{3,2}}{2}(\sin 2\theta_0 - \sin 2\theta')\cos 2\Phi_0 -$$

$$-\frac{B_{1,2} - B_{3,2}}{2}(\cos 2\theta_0 - \cos 2\theta')\sin 2\Phi_0 +$$

. . . .

$$+\frac{B_{1,2n} + B_{3,2n}}{2n}(\sin 2n\,\theta_0 - \sin 2n\,\theta')\cos 2n\,\Phi_0 -$$

$$-\frac{B_{1,2n} - B_{3,2n}}{2n}(\cos 2n\,\theta_0 \cos 2n\,\theta)\sin 2n\Phi_0 -$$

$$-\frac{B_{1,2n+1} - B_{3,2n+1}}{2n+1}\{\cos(2n+1)\theta_0 -$$

$$-\cos(2n+1)\theta'\}\cos(2n+1)\Phi_0 -$$

$$-\frac{B_{1,2n+1} + B_{3,2n+1}}{2n+1}\{\sin(2n+1)\theta_0 -$$

$$-\sin(2n+1)\theta'\}\sin(2n+1)\Phi_0\Big] -$$

$$-\frac{\mu(U_0 - U_1)R}{a}\Big[B_{2,0}\cdot 2\alpha_1 - B_{2,1}\sin\alpha_1\sin\Phi_0 +$$

$$+B_{2,2}\,2\sin 2\alpha_1\cos 2\Phi_0 + \ldots \frac{B_{2,2n}}{2n}\,2\sin 2n\alpha_1\cos 2n\Phi_0 -$$

$$-\frac{B_{2,2n+1}}{2n+1}\,2\sin(2n+1)\alpha_1\sin(2n+1)\Phi_0.\Big] \qquad (45)$$

В случае, где $\alpha_1=0$, все без исключения члены, содержащие угол α_1, исчезают в этом уравнении. Для $\theta'=0$, когда $A_{1,i}-A_{3,i}=0$ и $A_{1,i}+A_{3,i}=2A_i$, уравнение (45) преобразуется в следующее уравнение:

$$\frac{M}{R}=-\frac{\mu(U_0-U_1)R}{a}\Big[B_0 2\theta_0-B_1 2\sin\theta_0\sin\Phi_0+$$

$$+\frac{B_2}{2}2\sin 2\theta\sin 2\Phi_0+\ldots$$

$$+\frac{B_{2n}}{2n}2\sin 2n\theta_0\cos 2n\,\Phi_0-$$

$$-\frac{B_{2n+1}}{2n+1}2\sin(2n+1)\theta_0\sin(2n+1)\,\Phi_0. \qquad (46)$$

Это уравнение тождественно с уравнением (68), которое находится в мемуаре Осборна Рейнольдса.

§ 10. Влияние внешнего трения жидкости с подшипником и цапфою

В уравнениях (43) и (45) находятся две скорости, U_0 и U_1, которые до сих пор никак не определены для случая, когда жидкий слой скользит по поверхности подшипника и шипа. Существование таких скольжений подтверждается выводами, которые я дал в моем исследовании о статье Куэтта. Допуская некоторое скольжение жидкости относительно цапфы, надо иметь в виду, что U_0 — скорость движения жидкости отличается от скорости V на контуре цапфы и что скорость движения жидкости на подшипнике U_1 не будет равна скорости подшипника, которая для всех произведенных опытов по трению цапфы была равна нулю.

Принимая в расчет, что коэффициент трения жидкости с твердыми телами не зависит ни от гидродинамического давления, ни от скорости движения жидкости на твердом теле и что сила трения пропорциональна поверхности трения и скорости движения жидкости относительно твердого тела, мы обозначим эти коэффициенты через

λ_0 — коэффициент трения с цапфой,

λ_1 — коэффициент трения с подшипником.

Если подшипник прикасается к цапфе под углом $\Sigma\theta$, то на основании тех условий, при которых были написаны уравнения (21), (22) и (23), момент силы трения, уравновешиваемый моментом силы, вращающей цапфу, оба отнесенные к единице длины шипа, определяются из уравнения

$$\frac{M}{R} = -\lambda_0 R \sum \theta (V - U_0).$$

Соответствующий момент, приложенный к подшипнику, получается при помощи уравнения

$$\frac{M}{R+a} = -\lambda_1 (R+a) \sum \theta U_1,$$

откуда имеем

$$U_0 - U_1 = V + \frac{M[\lambda_1 (R+a)^2 + \lambda_0 R^2]}{\lambda_0 \lambda_1 R^2 (R+a)^2 \Sigma\theta}.$$

Подставляя вторую часть этого уравнения в (43) и (45), вместо разности $U_0 - U_1$, мы получим величины L и M, в зависимости от скорости V на поверхности цапфы.

Для упрощения сложного вида этих формул обозначим в уравнении (43) сумму всех членов, содержащих величины $A_{1,i}$, $A_{2,i}$, $A_{3,i}$, одной буквой $\mathfrak{A}$ и сумму членов, содержащих величины $B_{1,i}$, $B_{2,i}$ и $B_{3,}$ через $\mathfrak{B}$; в уравнении (45) обозначим через G сумму членов, содержащих $B_{1,i}$, $B_{2,i}$ и $B_{3,i}$.

При этих обозначениях два цитированных уравнения примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{L}{R} &= \frac{6\mu(U_0 - U_1)Rc}{a^2} + \frac{\mu(U_0 - U_1)}{a}\mathfrak{B}, \\ \frac{M}{R} &= \frac{\mu(U_0 - U_1)R}{a}G, \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

или

$$\frac{L}{R} = \mu\left[\frac{6Rc}{a^2}\mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{a}\right]\left\{V + \frac{M[\lambda_1(R+a)^2 + \lambda_0 R^2]}{\lambda_0\lambda_1 R^2(R+a)^2\Sigma\theta}\right\}. \quad (48)$$

$$\frac{M}{R} = -\frac{\mu R}{a}G\left\{V + \frac{M[\lambda_1(R+a)^2 + \lambda_0 R^2]}{\lambda_0\lambda_1 R^2(R+a)^2\Sigma\theta}\right\}. \quad (49)$$

Если величина a настолько мала по сравнению с R, что можно с достаточной точностью заменить сумму $R+a$ через R, то формулы упрощаются и принимают вид

$$\frac{L}{R} = -\frac{\mu V[6Rc\,\mathfrak{A} + \mathfrak{B}a]}{a\left[a + \frac{G}{\Sigma\theta}\left(\frac{\mu}{\lambda_0} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\right]} \quad (50)$$

и

$$\frac{M}{R} = -\frac{\mu VRG}{a + \frac{G}{\Sigma\theta}\left(\frac{\mu}{\lambda_0} + \frac{\mu}{\lambda_1}\right)}. \quad (51)$$

Уравнения (48) и (49) показывают, что M момент силы трения и, следовательно, сила трения и поддерживающая сила жидкого слоя L зависят одинаково от скорости V на поверхности, от внутреннего трения μ и от внешних трений λ_0 и λ_1. Поэтому нельзя применить эти уравнения для определения двух неизвестных коэффициентов трения μ и

$$\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1}.$$

§ 11. *Приложение изложенной теории к случаю сплошного цилиндрического подшипника без прорезов*

В этом случае углы θ и α имеют следующие величины:

$$\theta_{1,0}=\pi, \quad \theta_{3,0}=-\pi, \quad \theta_1'=0, \quad \theta_3'=0, \quad \alpha_1=0.$$

Следовательно, как сказано в § 8, имеется равенство коэффициентов

$$A_{1,i}=A_{3,i}=A_i \quad \text{и} \quad B_{1,i}=B_{3,i}=B_i\,.$$

Тогда уравнение (41) примет форму

$$0=\frac{6\pi Rc}{a}(2A_0-A_1\sin\Phi_0)-B_1\pi\sin\Phi_0,$$

что дает

$$\sin\Phi_0=\frac{12A_0Rc}{6A_1Rc+B_1a}\,. \tag{52}$$

Величины $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и G будут

$$\mathfrak{A}=A_1\pi, \quad \mathfrak{B}=-B_1\pi, \quad G=2B_0\pi.$$

Внося эти выражения в уравнения (50) и (51), получим

$$\frac{L}{R}=\frac{\mu\pi V\,[6a_1Rc-B_1a]}{a\left[a+B_0\left(\frac{\mu}{\lambda_0}+\frac{\mu}{\lambda_1}\right)\right]} \tag{53}$$

и

$$\frac{M}{R}=-\frac{\mu 2\pi RB_0V}{a+B\left(\frac{\mu}{\lambda_0}+\frac{\mu}{\lambda_1}\right)}\,. \tag{54}$$

При совпадении осей подшипника и цапфы, когда $c=0$, уравнения групп (26) и (27) показывают, что

$$A_0=-X_1, \quad A_1=1, \quad B_0=1$$

и что все другие коэффициенты $A_i=0$ и $B_i=0$ и, следовательно, для $c=0$

$$L=0, \qquad \frac{M}{R}=-\frac{\mu 2\pi RV}{a+\frac{\mu}{\lambda_0}+\frac{\mu}{\lambda_1}}.$$

Следовательно, в этом частном случае сила трения выражается формулой, которую я предложил в 1883 г.

Для $c>0$ угол Φ_0 должен удовлетворять уравнениям (47) и (31), и в этом случае последнее уравнение примет форму

$$0=A_0\pi+A_1\cos\Phi_0-\frac{A_2}{2}\sin 2\Phi_0+\ldots-\frac{A_{2n}}{2n}\sin 2n\,\Phi_0+$$
$$+\frac{A_{2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)\,\Phi_0. \qquad (55)$$

Два уравнения (47) и (55) для данного значения c определят величины Φ_0 и X_1.

Определив X_1 для разных значений c, можно будет высчитать соответствующие значения A_1, B_1 и B_0 и, внеся эти последние значения в уравнения (53) и (54), можно разрешить многие вопросы. Например, при исследовании опытов, когда $\frac{L}{R}$ и $\frac{M}{R}$ будут известны, можно найти a и c; при применении на практике, если R, a, V, μ и L даны, можно определить c и $\frac{M}{R}$.

§ 12. Приложение теории к моим опытам. Общие соображения и гипотеза, принятая относительно $\frac{\mu}{\lambda_0}+\frac{\mu}{\lambda_1}$.

Не приступая прямо к приложению нашей теории к опытам, необходимо установить некоторые положения, относя-

щиеся и к нашим опытам и к другим, проведенным в условиях, аналогичных с моими.

Если подшипник, соприкасающийся с цапфой, имеет контур, изображенный на фиг. 1, то в уравнениях, относящихся к этому случаю, неизвестными будут: углы Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3, тригонометрические величины X_1, X_2 и X, толщина слоя a, сжатие c и наибольшие гидродинамические давления p_1, p_2 и p_3 — всего 12 величин.

Для определения всех этих величин применим уравнения $(25)_1$, $(25)_2$, $(25)_3$, $(30)_1$, $(30)_2$, $(30)_3$, $(31)_1$, $(31)_2$, $(31)_3$, (41), (50) и (51).

Совместное решение этих уравнений представляет очень большие трудности. Если желательно [11] учитывать величины коэффициентов λ_0 и λ_1, то необходимо прежде всего найти достаточно точное их значение, чего до сих пор не было сделано.

По поводу статьи Куэтта я указал, что нельзя рассматривать λ_0 и λ_1 как бесконечно большие и что для сурепного масла можно допустить приблизительно, что

для $t = 11.35°$ C, $\frac{\mu}{\lambda} = 0.029$

$19.57°$ C, 0.0012.

Из моих опытов, описанных в «Известиях С.-Петербургского технологического института» видно, что

для оливкового масла:

для	$t = 12.17°$ C	$\frac{\mu}{\lambda} = 0.010\,(1 \pm 0.19)$ мм
	16.17	$0.0042\,(1 \pm 0.19)$
	21.30	$0.0011\,(1 \pm 0.28)$
	21.52	$0.0012\,(1 \pm 0.31)$
	62.15	$0.0002\,(1 \pm 3.3)$
		(1 ± 1.0)

для спермацетового масла:

для	$t = 19.05°$ C	$\frac{\mu}{\lambda} = 0.007\,(1 \pm 0.06)$
	22.22	$0.0012\,(1 \pm 0.37)$
	59.76	$0.0003\,(1 \pm 1.31)$

для сурепного масла:

для	$t = 11.65°$ C	$\frac{\mu}{\lambda} = 0.029\,(1 \pm 0.05)$
	19.57	$0.0012\,(1 \pm 0.21)$
	30.94	$0.00075\,(1 \pm 0.33)$
	41.16	$0.00108\,(1 \pm 0.29)$

для светлого минерального масла:

для	$t = 18.44°$ C	$\frac{\mu}{\lambda} = 0.014\,(1 \pm 0.11)$
	34.39	$0.003\,(1 \pm 0.18)$

для черного минерального масла:

для	$t = 12.86°$ C	$\frac{\mu}{\lambda} = 0.021\,(1 \pm 0.08)$
	52.32	$0.0004\,(1 \pm 0.078)$

Из приведенных данных видно, что в стеклянных трубках величина μ/λ для температур более или менее высоких выражается в тысячных или даже десятитысячных долях миллиметра, но что для низких температур она сводится к сотым долям миллиметра. Сравнение полученных мною результатов с результатами, полученными из опытов Куэтта, позволяет предположить, что такие же значения отношения μ/λ являются возможными также в случае контакта масел с подшипниками из желтой меди.

Из дальнейшего описания моих опытов [12], при предположении что $\frac{\mu}{\lambda_0}+\frac{\mu}{\lambda_1}=0$, будет видно, что для опытов при невысоких давлениях величина a находится в пределах от 0.00530 до 0.01074; при повышенных давлениях и для низких температур (около 18° C) та же величина a, по приблизительным расчетам, уменьшится до 0.00150. Отсюда надо заключить, что сумма

$$\frac{\mu}{\lambda_0}+\frac{\mu}{\lambda_1}<0.00150$$

даже при невысоких температурах. К тому же заключению пришел профессор Джон Гудмен, измеривший толщину слоя. Не указывая, при каких условиях он измерил эту толщину, Гудмен считает, что она варьируется от 0.0001 до 0.0004 дюйма, т. е. от 0.00254 до 0.01016 мм, что вполне согласуется с указанными здесь результатами моих опытов. На основании таблиц, приведенных далее, в § 16, можно считать, что $\frac{\mu}{\lambda_0}+\frac{\mu}{\lambda_1}$ существенно <0.00150. Таким образом, все, что нам до сих пор известно, приводит к выводу, что, не делая грубой ошибки при объяснении опытов, не отличающихся высокой степенью точности, можно для приблизительных расчетов принять, что

$$\frac{\mu}{\lambda_0}+\frac{\mu}{\lambda_1}=0.$$

При этом предположении надо заменить уравнения (50) и (51) двумя следующими:

$$\left.\begin{aligned}\frac{L}{R}&=-\frac{\mu V\,[6Rc\mathfrak{A}+\mathfrak{L}a]}{a^2}\\ \text{и}\qquad \frac{M}{R}&=-\frac{\mu VRG}{a}\end{aligned}\right\}\qquad(56)$$

Самый удобный способ решения указанных уравнений состоит в том, что при заданном ряде величин c вычисляют по уравнениям (26) и (27) коэффициенты $A_{1,i}$, $B_{1,i}$, $A_{2,i}$, $B_{2,i}$, $A_{3,i}$ и $B_{3,i}$, в которые входят неизвестные X_1, X_2, X_3. Для определения этих неизвестных для каждого из заданных значений c надо внести выражения коэффициентов A и B в уравнения $(31)_1$, $(31)_2$, $(31)_3$. Здесь надо снова дать ряд значений углов Φ_0 и для каждой группы заданных значений c и Φ_0 следует вычислить следующие значения X_1, X_2 и X_3.

Уравнения $(25)_1$, $(25)_2$ и $(25)_3$ определяют величины углов Φ_1, Φ_2 и Φ_3, соответствующие каждой из рассмотренных групп значений c и Φ_0.

Все значения, определенные таким образом, должны быть подставлены в уравнение (41). Остается еще перенести в уравнения (55) и (56) те группы, которые удовлетворяют уравнению (41). Наконец, одна группа указанных значений, которая приводит к тому же самому определению a при помощи уравнения (55), так же как и при помощи уравнения (56), даст решение задачи. Применение описанного приема, изложенного дальше, лучше объяснит этот вопрос.

После изложенного определения величин c, Φ_0 и a можно без затруднения при помощи уравнений $(30)_1$, $(30)_2$ и $(30)_3$ определить гидродинамические давления p_1, p_2 и p_3.

§ 13. Приложение уравнений (41), (43) и (45) к рассматриваемому случаю

В подшипнике одной из машин, с которыми производились мои опыты, были только две верхние части подшипника, расположенные симметрично, и, следовательно, здесь угол $\alpha_1=0$.

Поэтому в уравнениях (41), (43) и (45) все члены, соответствующие углу α_1, приводятся к 0.

Два других угла были

$$\theta_0=50^\circ$$

и

$$\theta=11^\circ 32' 10''.$$

Внося эти значения в уравнения (41), (43) и (45), получим

$$0=0.1346(A_{1,0}=A_{3,0})+0.05680(A_{1,1}-A_{3\ 1})\cos\Phi_0-$$
$$-0.12005(A_{1,1}+A_{3,1})\sin\Phi_0+0.08110(A_{1,2}+A_{3,2})\cos 2\Phi_0+$$
$$+0.09852(A_{1,2}-A_{3,2})\sin 2\Phi_0+0.11555(A_{1,3}-A_{3,3})\cos 3\Phi_0-$$
$$-0.02958(A_{1,3}+A_{3,3})\sin 3\Phi_0-$$
$$-0.01896(A_{1,4}+A_{3,4})\cos 4\Phi_0+0.10684(A_{1,4}-A_{3,4})\sin 4\Phi_0+$$
$$+0.07926(A_{1,5}-A_{2,5})\cos 5\Phi_0+0.08693(A_{1\ 5}+A_{3,5})\sin 5\Phi_0-$$
$$-0.06344(A_{1,6}+A_{3,6})\cos 6\Phi_0+$$
$$+0.04435(A_{1,6}-A_{3.6})\sin 6\Phi_0+$$
$$+0.02438(A_{1\ 7}-A_{3,7})\cos 7\Phi_0+$$
$$+0.06577(A_{1,7}+A_{3,7})\sin 7\Phi_0-$$
$$-0.05266(A_{1,8}-A_{3,8})\cos 8\Phi_0-0.00734(A_{1.8}-A_{3,8})\sin 8\Phi_0-$$
$$-0.00279(A_{1,9}-A_{3,9})\cos 9\Phi_0+0.03590(A_{1,9}+A_{3,9})\sin 9\Phi_0-$$
$$-0.02587(A_{1,10}+A_{3,10})\cos 10\Phi_0+$$
$$+0.00855(A_{1,10}-A_{2,10})\sin 10\Phi_0+$$
$$+0.01901(A_{1.11}-A_{3,11})\cos 11\Phi_0+$$
$$+0.01990(A_{1,11}+A_{3,11})\sin 10\Phi_0-$$
$$-0.01771(A_{1,12}+A_{3,12})\cos 12\Phi_0+$$
$$+0.02534(A_{1,12}-A_{3,12})\sin 12\Phi_0+$$
$$+\frac{a}{6Rc}[0.56600(B_{1,0}+B_{3,0})+0.27340(B_{1.1}-B_{3,1})\cos\Phi_0-$$
$$-0.48395(B_{1,1}+B_{3,1})\sin\Phi_0+0.27170(B_{1,2}+B_{3,2})\cos 2\Phi_0+$$
$$+0.45000(B_{1,2}-B_{3,2})\sin 2\Phi_0+0.47745(B_{1\ 3}-B_{3,3})\cos 3\Phi_0-$$
$$-0.01535(B_{1,3}+B_{3,3})\sin 3\Phi_0-0.18975(B_{1,4}+B_{3,4})\cos 4\Phi_0+$$
$$+0.36920(B_{1,4}-B_{3,4})\sin 4\Phi_0+0.19195(B_{1,5}-B_{3,5})\cos 5\Phi_0+$$
$$+0.28297(B_{1,5}+B_{3,5})\sin 5\Phi_0-0.26137(B_{1,6}+B_{3,6})\cos 6\Phi_0+$$
$$+0.02877(B_{1,6}-B_{3,6})\sin 6\Phi_0-0.05728(B_{1,7}-B_{3,7})\cos 7\Phi_0+$$
$$+0.17235(B_{1,7}+B_{3,7})\sin 7\Phi_0-$$

$$-0.08130(B_{1,8}+B_{3,8})\cos 8\Phi_0+0.09507(B_{1,8}-B_{3,8})\sin 8\Phi_0+$$
$$+0.01433(B_{1,9}-B_{3,9})\cos 9\Phi_0+0.09959(B_{1,9}+B_{3,9})\sin 9\Phi_0-$$
$$-0.04263(B_{1,10}+B_{3,10})\cos 10\Phi_0+$$
$$+0.08533(B_{1,10}-B_{3,10})\sin 10\Phi_0+$$
$$+0.11255(B_{1,11}-B_{3,11})\cos 11\Phi_0+$$
$$+0.07677(B_{1,11}+B_{3,11})\sin 11\Phi_0-$$
$$-0.09963(B_{1,12}+B_{3,12})\cos 12\Phi_0-$$
$$-0.09219(B_{1,12}-B_{3,12})\sin 12\Phi_0. \qquad (57)$$

$$\frac{L}{R}=\frac{6\mu(U_0-U_1)Rc}{a^2}\{0.17720(A_{1,0}-A_{3,0})+$$
$$+0.07060(A_{1,1}+A_{3,1})\cos\Phi_0-0.16020(A_{1,1}-A_{3,1})\sin\Phi_0+$$
$$+0.11410(A_{1,2}-A_{3,2})\cos 2\Phi_0+0.12450(A_{1,2}+A_{3,2})\sin 2\Phi_0+$$
$$+0.15015(A_{1,3}+A_{3,3})\cos 3\Phi_0-0.05200(A_{1,3}-A_{3,3})\sin 3\Phi_0-$$
$$-0.0097(A_{1,4}-A_{3,4})\cos 4\Phi_0+0.1455(A_{1,4}+A_{3,4})\sin 4\Phi_0+$$
$$+0.0868(A_{1,5}+A_{3,5})\cos 5\Phi_0+0.0368(A_{1,5}-A_{3,5})\sin 5\Phi_0-$$
$$-0.0393(A_{1,6}-A_{3,6})\cos 6\Phi_0+0.0592(A_{1,6}+A_{3,6})\sin 6\Phi_0+$$
$$+0.0311(A_{1,7}+A_{3,7})\cos 7\Phi_0+0.0481(A_{1,7}-A_{3,7})\sin 7\Phi_0-$$
$$-0.0411(A_{1,8}-A_{3,8})\cos 8\Phi_0+0.0116(A_{1,8}+A_{3,8})\sin 8\Phi_0+$$
$$+0.0114(A_{1,9}+A_{3,9})\cos 9\Phi_0+0.0289(A_{1,9}-A_{3,9})\sin 9\Phi_0-$$
$$-0.0170(A_{1,10}-A_{3,10})\cos 10\Phi_0+$$
$$+0.0164(A_{1,10}+A_{3,10})\sin 10\Phi_0+$$
$$+0.0224(A_{1,11}+A_{3,11})\cos 11\Phi_0-$$
$$-0.0096(A_{1,11}-A_{3,11})\sin 11\Phi_0-$$
$$-0.0080(A_{1,12}-A_{3,12})\cos 12\Phi_0+$$
$$+0.0260(A_{1,12}+A_{3,12})\sin 12\Phi_0-\frac{a}{6Rc}[0.3370(B_{1,0}-B_{3,0})+$$
$$+0.1875(B_{1,1}+B_{3,1})\cos\Phi_0-0.2734(B_{1,1}-B_{3,1})\sin\Phi_0+$$
$$+0.1130(B_{1,2}-B_{3,2})\cos 2\Phi_0+0.2943(B_{1,2}+B_{3,2})\sin 2\Phi_0+$$
$$+0.2812(B_{1,3}+B_{3,3})\cos 3\Phi_0+0.0694(B_{1,3}+B_{3,3})\sin 3\Phi_0-$$
$$-0.1939(B_{1,4}-B_{3,4})\cos 4\Phi_0+0.1672(B_{1,4}+B_{3,4})\sin 4\Phi_0-$$
$$-0.0172(B_{1,5}+B_{3,5})\cos 5\Phi_0-0.2162(B_{1,5}-B_{3,5})\sin 5\Phi_0+$$
$$+0.01466(B_{1,6}-B_{3,6})\cos 6\Phi_0+0.0956(B_{1,6}+B_{3,6})\sin 6\Phi_0+$$
$$+0.1278(B_{1,7}+B_{3,7})\cos 7\Phi_0-0.0333(B_{1,7}-B_{3,7})\sin 7\Phi_0+$$

$$+0.072(B_{1,8}-B_{3,8})\cos 8\Phi_0+0.0845(B_{1,8}+B_{3,8})\sin 8\Phi_0+$$
$$+0.0092(B_{1,9}+B_{3,9})\cos 9\Phi_0+0.1051(B_{1,9}-B_{3,9})\sin 9\Phi_0-$$
$$-0.0588(B_{1,10}-B_{3,10})\cos 10\Phi_0-$$
$$-0.0459(B_{1,10}+B_{3,10})\sin 10\Phi_0-$$
$$-0.0502(B_{1,11}+B_{3,11})\cos 11\Phi_0-$$
$$-0.0069(B_{1,11}+B_{3,11})\sin 11\Phi_0+$$
$$+0.0405(B_{1,12}-B_{3,12})\cos 12\Phi_0-$$
$$-0.0112(B_{1,12}+B_{3,12})\sin 12\Phi_0]\}. \qquad (58)$$

$$\frac{M}{R}=-\frac{\mu(U_0-U_1)R}{a}\{0.6714(B_{1,0}+B_{3,0})+$$
$$+0.3370(B_{1,1}-B_{3,1})\cos\Phi_0-0.5660(B_{1,1}+B_{3,1})\sin\Phi_0+$$
$$+0.2964(B_{1,2}+B_{3,2})\cos 2\Phi_0+0.5468(B_{1,2}-B_{3,2})\sin 2\Phi_0+$$
$$+0.5631(B_{1,3}-B_{3,3})\cos 3\Phi_0+0.0227(B_{1,3}+B_{3,3})\sin 3\Phi_0-$$
$$-0.2658(B_{1,4}+B_{3,4})\cos 4\Phi_0+0.4081(B_{1,4}-B_{3,4})\sin 4\Phi_0+$$
$$+0.1753(B_{1,5}-B_{3,5})\cos 5\Phi_0+0.3570(B_{1,5}+B_{3,5})\sin 5\Phi_0-$$
$$-0.3002(B_{1,6}+B_{3,6})\cos 6\Phi_0-0.0242(B_{1,6}-B_{3,6})\sin 6\Phi_0-$$
$$-0.1178(B_{1,7}-B_{3,7})\cos 7\Phi_0+0.1658(B_{1,7}+B_{3,7})\sin 7\Phi_0-$$
$$-0.0446(B_{1,8}+B_{3,8})\cos 8\Phi_0-0.0908(B_{1,8}-B_{3,8})\sin 8\Phi_0+$$
$$+0.0266(B_{1,9}-B_{3,9})\cos 9\Phi_0-0.0032(B_{1,9}+B_{3,9})\sin 9\Phi_0-$$
$$-0.0261(B_{1,10}+B_{3,10})\cos 10\Phi_0+$$
$$+0.1194(B_{1,10}-B_{3,10})\sin 10\Phi_0+$$
$$+0.1441(B_{1,11}-B_{3,11})\cos 11\Phi_0+$$
$$+0.0885(B_{1,11}+B_{3,11})\sin 11\Phi_0-$$
$$-0.1275(B_{1,12}+B_{3,12})\cos 12\Phi_0+$$
$$+0.1040(B_{1,12}-B_{3,12})\sin 12\Phi_0\}. \qquad (59)$$

§ 14. *Определение коэффициентов* A_i и B_i *для* $c=0$, $c=0.1$, $c=0.2$, $c=0.3$, $c=0.4$, $c=0.5$, $c=0.6$

Для числового решения уравнений (57), (58) и (59), принимая в расчет уравнения условия $(31)_1$ и $(31)_2$, уравнения $(25)_1$ и $(25)_3$, определяющие значения углов Φ_1 и Φ_3, и

уравнения $(28)_1$ и $(28)_3$, определяющие гидродинамические давления p_1 и p_3, необходимо написать числовые значения $A_{1,i}$, $A_{3,i}$, $B_{1,i}$ и $B_{3,i}$, вычисленные по формулам (26) и (27). Все эти последние величины указаны в семи следующих таблицах. Для упрощения обозначения указаны только величины $A_{1,i}$ и $B_{1,i}$. Значения $A_{3,i}$ и $B_{3,i}$ получаются из указанных формул простой заменой X_1 на X_3.

Таблица 1 [13]

$c = 0$

$$\left.\begin{aligned} A_{1,0} &= -X_1 \\ A_{1,1} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}(60)\\ c=0\end{matrix}$$

$$B_{1,0} = 1 \qquad \begin{matrix}(61)\\ c=0\end{matrix}$$

Таблица 2

$c = 0.1$

$$\left.\begin{aligned} A_{1,0} &= -0.15382 - 1.03057\ X_1 \\ A_{1,1} &= 1.04595 + 0.30763\ X_1 \\ A_{1,2} &= 0.15510 + 0.03076\ X_1 \\ A_{1,3} &= 0.01548 - 0.00257\ X_1 \\ A_{1,4} &= -0.00129 - 0.00019\ X_1 \\ A_{1,5} &= 0.00010 + 0.00001\ X_1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}(60)\\ c = 0.1\end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} B_{1,0} &= 0.97458 - 0.030456\ X_1 \\ B_{1,1} &= 0.20609 + 0.06091\ X_1 \\ B_{1,2} &= 0.02506 + 0.00458\ X_1 \\ B_{1,3} &= -0.00205 - 0.00041\ X_1 \\ B_{1,4} &= -0.00014 - 0.00002\ X_1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}(61)\\ c = 0.1\end{matrix}$$

Таблица 3

$$\left.\begin{aligned}
A_{1,0} &= -0.33223 - 1.12959\ X_1\\
A_{1,1} &= 0.19604 + 0.66447\ X_1\\
A_{1,2} &= 0.34336 + 0.13389\ X_1\\
A_{1,3} &= -0.06813 - 0.02225\ X_1\\
A_{1,4} &= -0.01136 - 0.00336\ X_1\\
A_{1,5} &= 0.00171 + 0.00047\ X_1\\
A_{1,6} &= 0.00024 + 0.00006\ X_1
\end{aligned}\right\} \quad \begin{gathered}(60)\\ c = 0.2\end{gathered}$$

$$\left.\begin{aligned}
B_{1,0} &= 0.89304 - 0.63788\ X_1\\
B_{1,1} &= 0.45095 + 0.25515\ X_1\\
B_{1,2} &= 0.10934 + 0.03853\ X_1\\
B_{1,3} &= -0.01748 - 0.00518\ X_1\\
B_{1,4} &= -0.00242 - 0.00065\ X_1\\
B_{1,5} &= 0.00031 + 0.00008\ X_1
\end{aligned}\right\} \quad \begin{gathered}(61)\\ c = 0.2\end{gathered}$$

Таблица 4

$$\left.\begin{aligned}
A_{1,0} &= -0.56964 - 1.32284\ X_1\\
A_{1,1} &= 1.49274 + 1.13931\ X_1\\
A_{1,2} &= 0.61287 + 0.34179\ X_1\\
A_{1,3} &= -0.18076 - 0.08643\ X_1\\
A_{1,4} &= -0.04533 - 0.01976\ X_1\\
A_{1,5} &= 0.01031 + 0.00423\ X_1\\
A_{1,6} &= 0.00180 + 0.00096\ X_1\\
A_{1,7} &= -0.00043 - 0.00017\ X_1\\
A_{1,8} &= -0.00009 - 0.0000\ X_1
\end{aligned}\right\} \quad \begin{gathered}(60)\\ c = 0.3\end{gathered}$$

$$\left.\begin{aligned}
B_{1,0} &= 0.73725 - 1.03576\ X_1\\
B_{1,1} &= 0.78594 + 0.62206\ X_1\\
B_{1,2} &= 0.27610 + 0.14214\ X_1\\
B_{1,3} &= -0.06626 - 0.03708\ X_1\\
B_{1,4} &= -0.01384 - 0.00555\ X_1\\
B_{1,5} &= 0.00269 + 0.00102\ X_1\\
B_{1,6} &= 0.00050 + 0.00018\ X_1\\
B_{1,7} &= -0.00009 - 0.00003\ X_1\\
B_{1,8} &= -0.00002 - 0.00001\ X_1
\end{aligned}\right\} \quad \begin{gathered}(61)\\ c = 0.3\end{gathered}$$

Таблица 5

$c = 0.4$

$$\left.\begin{aligned}
A_{1,0} &= -0.92779 - 1.67004\ X_1 \\
A_{1,1} &= 2.04115 + 1.85560\ X_1 \\
A_{1,2} &= 1.05413 + 0.74224\ X_1 \\
A_{1,3} &= -0.41009 - 0.25262\ X_1 \\
A_{1,4} &= -0.13761 - 0.07806\ X_1 \\
A_{1,5} &= 0.04210 + 0.02270\ X_1 \\
A_{1,6} &= 0.01215 + 0.00725\ X_1 \\
A_{1,7} &= -0.00316 - 0.00173\ X_1 \\
A_{1,8} &= -0.00089 - 0.00046\ X_1 \\
A_{1,9} &= 0.00023 + 0.00011\ X_1 \\
A_{1,10} &= 0.00006\ X_1
\end{aligned}\right\}\quad \begin{matrix}(60)\\ c = 0.4\end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
B_{1,0} &= 0.46755 - 1.56791\ X_1 \\
B_{1,1} &= 1.29561 + 1.24696\ X_1 \\
B_{1,2} &= 0.58156 + 0.38471\ X_1 \\
B_{1,3} &= -0.18632 - 0.10627\ X_1 \\
B_{1,4} &= -0.05244 - 0.02760\ X_1 \\
B_{1,5} &= 0.01377 + 0.00689\ X_1 \\
B_{1,6} &= 0.00346 + 0.00172\ X_1 \\
B_{1,7} &= -0.00085 - 0.00040\ X_1 \\
B_{1,8} &= -0.00020 - 0.00009\ X_1 \\
B_{1,9} &= 0.00004 + 0.00002\ X_1
\end{aligned}\right\}\quad \begin{matrix}(61)\\ c = 0.4\end{matrix}$$

Эти таблицы приложимы ко всякому опыту, к которому приложима изложенная выше теория.

Табл. 6 для значения $c = 0.5$ очень значительно отличается от таблицы, данной Осборном Рейнольдсом, содержащей много ошибочных цифр.

Для численной обработки результатов произведенных нами опытов по трению смазанных осей надо для большого упро-

Таблица 6

$c = 0.5$

$$\left.\begin{aligned}
A_{1,0} &= -1.53956 - 2.30940\ X_1\\
A_{1,1} &= 3.07915 + 3.07934\ X_1\\
A_{1,2} &= 1.87123 + 1.53960\ X_1\\
A_{1,3} &= -0.89021 - 0.66321\ X_1\\
A_{1,4} &= -0.37980 - 0.26067\ X_1\\
A_{1,5} &= 0.14668 + 0.09635\ X_1\\
A_{1,6} &= 0.05368 + 0.03406\ X_1\\
A_{1,7} &= -0.01724 - 0.01170\ X_1\\
A_{1,8} &= -0.00644 - 0.00405\ X_1\\
A_{1,9} &= 0.00218 + 0.00126\ X_1\\
A_{1,10} &= 0.00069 + 0.00040\ X_1\\
A_{1,11} &= -0.00026 - 0.00012\ X_1\\
A_{1,12} &= -0.00007 - 0.00004\ X_1
\end{aligned}\right\}\quad \begin{matrix}(60)\\ c = 0.5\end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
B_{1,0} &= -0.00056 - 2.30940\ X_1\\
B_{1,1} &= 2.14356 + 2.30938\ X_1\\
B_{1,2} &= 1.14875 + 0.67161\ X_1\\
B_{1,3} &= -0.46170 - 0.31965\ X_1\\
B_{1,4} &= -0.16495 - 0.10630\ X_1\\
B_{1,5} &= 0.05525 + 0.03400\ X_1\\
B_{1,6} &= 0.01778 + 0.01064\ X_1\\
B_{1,7} &= -0.00556 - 0.00323\ X_1\\
B_{1,8} &= -0.00170 - 0.00097\ X_1\\
B_{1,9} &= 0.00049 + 0.00028\ X_1\\
B_{1,10} &= 0.00015 + 0.00006\ X_1\\
B_{1,11} &= -0.00004 - 0.00002\ X_1
\end{aligned}\right\}\quad \begin{matrix}(61)\\ c = 0.5\end{matrix}$$

щения вычислений, основываясь на указаныхх таблицах, составить таблицы, не указанные здесь, определяя значения

$$\frac{A_{1,i}}{i},\ \frac{A_{3,i}}{i},\ A_{1,i1} + A_{3,i2},\ A_{1,i3} - A_{3,i4},\ B_{1,i5} + B_{3,i},\ B_{1,i6} - B_{3,i}.$$

Таблица 7

$c = 0.6$

$$\left.\begin{aligned}
A_{1,0} &= -2.73572 - 3.60078\ X_1 \\
A_{1,1} &= 5.24813 + 5.49394\ X_1 \\
A_{1,2} &= 3.61222 + 3.29610\ X_1 \\
A_{1,3} &= -2.06579 - 1.63108\ X_1 \\
A_{1,4} &= -1.05620 - 0.83594\ X_1 \\
A_{1,5} &= 0.49483 + 0.38108\ X_1 \\
A_{1,6} &= 0.22716 + 0.15642\ X_1 \\
A_{1,7} &= -0.08684 - 0.07130\ X_1 \\
A_{1,8} &= -0.04214 - 0.03002\ X_1 \\
A_{1,9} &= 0.01679 + 0.01171\ X_1 \\
A_{1,10} &= 0.00674 + 0.00461\ X_1 \\
A_{1,11} &= -0.00256 - 0.00180\ X_1 \\
A_{1,12} &= -0.00103 - 0.00069\ X_1
\end{aligned}\right\}\ \begin{matrix}(60)\\ c = 0.6\end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned}
B_{1,0} &= -0.86277 - 3.51557\ X_1 \\
B_{1,1} &= 3.69762 + 4.21857\ X_1 \\
B_{1,2} &= 2.27305 + 2.03120\ X_1 \\
B_{1,3} &= -1.10522 - 0.88531\ X_1 \\
B_{1,4} &= -0.48407 - 0.37298\ X_1 \\
B_{1,5} &= 0.20009 + 0.14457\ X_1 \\
B_{1,6} &= 0.07946 + 0.05317\ X_1 \\
B_{1,7} &= -0.03095 - 0.02107\ X_1 \\
B_{1,8} &= -0.01161 - 0.00791\ X_1 \\
B_{1,9} &= 0.00421 + 0.00288\ X_1 \\
B_{1,10} &= 0.00160 + 0.00106\ X_1 \\
B_{1,11} &= -0.00058 - 0.00038\ X_1 \\
B_{1,12} &= -0.00021 - 0.00017\ X_1
\end{aligned}\right\}\ \begin{matrix}(61)\\ c = 0.6\end{matrix}$$

§ 15. Определение угла Φ_0 и величин X_1 и X_3

Таким образом, мы пришли к нахождению способа для сложного и трудного подбора величины Φ_0, одновременно удовлетворяя уравнениям $(31)_1$ и $(31)_3$, соответствующей группе

уравнений (60) и (61) и уравнению (57) для данного значения c. Результаты вычислений, относящихся к произведенным мною опытам, непосредственно получаются следующим образом:

1) Для $c=0.1$

Подставляя в уравнения $(31)_1$ и $(31)_3$ углы $\theta_0=50°$ и $\theta_1=11°32'10''$ и вышеуказанные величины $A_{1,i}$ и $A_{3,i}$ групп $(60)_{c=0.1}$ и $(61)_{c=0.1}$, находим

$$\left.\begin{aligned} &\text{для } \Phi_0=15°: \quad X_1=0.25664, \; X_3=-0.70967, \\ &\text{для } \Phi_0=16°: \quad X_1=0.24004, \; X_3=-0.72046. \end{aligned}\right\} \qquad (62)_{c=0.1}$$

Подставляя эти величины в группы уравнений $(60)_{c=0.1}$ и $(61)_{c=0.1}$ и внося полученные таким образом значения $A_{1,i}$, $A_{3,i}$, $B_{1,i}$ и $B_{3,i}$ в уравнение (57) для $c=0.1$, находят, что второй член уравнения (57), который мы обозначим через $S_{0,1}$, примет вид:

$$\text{для } \Phi_0=15°: \quad S_{0,1}=-0.00021+1.93\frac{a}{R},$$

$$\text{для } \Phi_0=16°: \quad S_{0,1}=-0.00063+1.97\frac{a}{R}.$$

Так как $R=30$ мм и величина a содержится в пределах

$$0.02>a>0.002,$$

то видно, что

$$0.0013>193\frac{a}{R}>0.00013.$$

Значение угла Φ_0, обращающее $S_{0,1}$ в 0 для очень малых значений a, составит 15°, для немного бо́льших значений угол Φ_0 будет больше 15° и меньше 16°; поэтому искомое значение Φ_0 будет близко к 15.5°.

Подставляя те же самые значения c, Φ_0, $A_{1,i}$, $B_{1,i}$ и $B_{3,i}$ в уравнения (58) и (59), затем в уравнения (55) и (56), получим с помощью уравнений (58) и (55)

$$\text{для } \Phi_0=15^\circ: \quad \frac{L}{R}=-\frac{\mu VR}{a^2}\left[0.0226-0.025\frac{a}{R}\right],$$

$$\text{для } \Phi_0=16^\circ: \quad \frac{L}{R}=\frac{\mu VR}{a^2}\left[0.0225-0.027\frac{a}{R}\right],$$

или так как

$$\frac{a}{R}<0.00067,$$

а следовательно,

$$0.027\frac{a}{R}<0.000018,$$

то можно, без боязни допустить ошибку, написать до четвертого члена (десять миллионных)

$$\left.\begin{aligned} &\text{для } \Phi_0=15^\circ: \quad \frac{L}{R}=-0.0226\frac{\mu VR}{a^2}\\ &\text{для } \Phi_0=16^\circ: \quad \frac{L}{R}=-0.0225\frac{\mu VR}{a^2}\end{aligned}\right\} \quad \begin{gathered}(63)\\ c=0.1\end{gathered}$$

При помощи уравнений (59) и (56) получим

$$\left.\begin{aligned} &\text{для } \Phi_0=15^\circ: \quad \frac{M}{R}=-0.6873\frac{\mu V2R}{a}\\ &\text{для } \Phi_0=16^\circ: \quad \frac{M}{R}=-0.6896\frac{\mu V2R}{a}\end{aligned}\right\} \quad \begin{gathered}(64)\\ c=0.1\end{gathered}$$

2) Для $c=0.2$

Для $c=0.2$ из уравнений $(31)_1$ и $(31)_3$ выводят

для $\Phi_0=21^\circ$: $X_1=0.14565$, $X_3=-0.78037$,
для $\Phi_0=22^\circ$: $X_1=0.12877$, $X_3=-0.79069$.

Подставляя эти значения в уравнения $(60)_{0.2}$ и $(61)_{0.2}$, определим величины $A_{1,i}$, $A_{3,i}$, $B_{1,i}$ и $B_{3,i}$ и тогда из уравнения (57) получим

$$\text{для } \Phi_0=21^\circ: \quad S_{0,2}=0.00149+0.108\frac{a}{R},$$

$$\text{для } \Phi_0=22^\circ: \quad S_{0,2}=-0.00652+0.107\frac{a}{R},$$

и так как

$$0.108\frac{a}{R}<0.00007,$$

то искомый угол, удовлетворяющий уравнениям $(31)_1$, $(31)_3$, $(60)_{0.2}$, $(61)_{0.2}$ и (57), будет

$$21^\circ<\Phi_0<22^\circ.$$

Подставляя эти величины в уравнения (58)—(55), находят

$$\text{для } \Phi_0=21^\circ: \quad \frac{L}{R}=-\frac{\mu VR}{a^2}\left[0.0487-0.047\frac{a}{R}\right],$$

$$\text{для } \Phi_0=22^\circ: \quad \frac{L}{R}=-\frac{\mu VR}{a^2}\left[0.0471-0.047\frac{a}{R}\right],$$

и так как

$$0.047\frac{a}{R}<0.00003,$$

то, остановившись на первых четырех цифрах, можно написать

$$\left.\begin{aligned} &\text{для } \Phi_0=21^\circ: \quad \frac{L}{R}=-0.0487\frac{\mu VR}{a^2},\\ &\text{для } \Phi_0=22^\circ: \quad \frac{L}{R}=-0.0471\frac{\mu VR}{a^2}, \end{aligned}\right\} \qquad \begin{gathered}(63)\\ c=0.2\end{gathered}$$

Из уравнений (59) получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\text{для } \Phi_0=21^\circ: \quad \frac{M}{R}=-0.7247\frac{\mu V2R}{a}, \\ &\text{для } \Phi_0=22^\circ: \quad \frac{M}{R}=-0.7268\frac{\mu V2R}{a}. \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}(64)\\ c=0.2\end{matrix}$$

3) Для $c=0.3$

Предположив, что $\Phi_0=34^\circ$, $\Phi_0=35^\circ$, $\Phi_0=36^\circ$, из уравнений $(31)_1$ и $(31)_3$ выводят

$$\begin{aligned} &\text{для } \Phi_0=34^\circ: \quad X_1=-0.08813, \; X_3=-0.89602, \\ &\text{для } \Phi_0=35^\circ: \quad X_1=-0.10532, \; X_3=-0.90192, \\ &\text{для } \Phi_0=36^\circ: \quad X_1=-0.12303, \; X_3=-0.90827. \end{aligned} \quad \begin{matrix}(62)\\ c=0.3\end{matrix}$$

Внося эти величины $X_{1,i}$ и $X_{3,i}$ в уравнения $(60)_{c=0,3}$ и $(61)_{c=0.3}$, вычисляем $A_{1,i}$, $A_{3,i}$, $B_{1.i}$, $B_{3,i}$ и вносим в уравнение (57), что дает

$$\begin{aligned} &\text{для } \Phi_0=34^\circ: \quad S_{0,3}=-0.00018+0.12\frac{a}{R}, \\ &\text{для } \Phi_0=35^\circ: \quad S_{0,3}=-0.00086+0.10\frac{a}{R}, \\ &\text{для } \Phi_0=36^\circ: \quad S_{0,3}=-0.00728+0.09\frac{a}{R}. \end{aligned}$$

Так как

$$0.1\frac{a}{R}<0.00007,$$

то угол Φ_0, удовлетворяющий уравнениям $(31)_1$, $(31)_3$, $(60)_{0.3}$ и (57), содержится в пределах

$$34^\circ<\Phi_0<35^\circ.$$

Внося те же значения в уравнения (58) и (59), получим из уравнений (58) и (55)

для $\Phi_0=34°$: $\frac{L}{R}=-\frac{\mu VR}{a^2}\left[0.0817-0.09\frac{a}{R}\right]$,

для $\Phi_0=35°$: $\frac{L}{R}=-\frac{\mu VR}{a^2}\left[0.0796-0.09\frac{a}{R}\right]$,

для $\Phi_0=36°$: $\frac{L}{R}=-\frac{\mu VR}{a_2}\left[0.0783-0.09\frac{a}{R}\right]$,

и так как

$$0.09\frac{a}{R}<0.00006,$$

то, остановившись на первых четырех цифрах можно применить уравнения

$$\left.\begin{aligned}&\text{для } \Phi_0=34°: \quad \frac{L}{R}=-0.0817\frac{\mu VR}{a^2},\\&\text{для } \Phi_0=35°: \quad \frac{L}{R}=-0.0796\frac{\mu VR}{a^2}.\end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}(63)\\ c=0.3\end{matrix}$$

Из уравнений (59) и (56) получается

для $\Phi_0=34°$: $\frac{M}{R}=-0.8177\frac{\mu V2R}{a}$,

для $\Phi_0=35°$: $\frac{M}{R}=-0.8150\frac{\mu V2R}{a}$,

для $\Phi_0=36°$: $\frac{M}{R}=-0.8121\frac{\mu V2R}{a}$. (64) $c=0.3$

4) Для $c=0.4$

В соответствии со сказанным выше

для $\Phi_0=36°$: $X_1=-0.09667$, $X_3=-0.91915$,

для $\Phi_0=37°$: $X_1=-0.10846$, $X_3=-0.92578$, (62) $c=0.4$

для $\Phi_0=38°$: $X_1=-0.12031$, $X_3=-0.93206$.

Имеем

$$\text{для } \Phi_0=36^\circ: \qquad S_{0,4}=0.00066-0.14\frac{a}{R},$$

$$\text{для } \Phi_0=37^\circ: \qquad S_{0,4}=-0.00035-0.15\frac{a}{R},$$

$$\text{для } \Phi_0=38^\circ: \qquad S_{0,4}=-0.00272-0.16\frac{a}{R},$$

и так как

$$0.14\frac{a}{R}<0.00009,$$

то искомый угол Φ_0 содержится между 36° и 37°, т. е.

$$36^\circ<\Phi_0<37^\circ.$$

Из уравнений (58) и (55) выводим

$$\text{для } \Phi_0=36^\circ: \qquad \frac{L}{R}=-\frac{\mu VR}{a^2}\left[0.1612-0.34\frac{a}{R}\right],$$

$$\text{для } \Phi_0=37^\circ: \qquad \frac{L}{R}=-\frac{\mu VR}{a^2}\left[0.1618-0.35\frac{a}{R}\right],$$

и так как

$$0.35\frac{a}{R}<0.00020,$$

то, остановившись на трех первых десятичных цифрах, можно принять, что

$$\left.\begin{aligned} &\text{для } \Phi_0=36^\circ: \qquad \frac{L}{R}=-0.1612\frac{\mu VR}{a^2},\\ &\text{для } \Phi_0=37^\circ: \qquad \frac{L}{R}=-0.1618\frac{\mu VR}{a^2}. \end{aligned}\right\} \qquad \begin{matrix}(63)\\ c=0.4\end{matrix}$$

Далее, уравнения (59) и (56) дают

$$\left.\begin{aligned} &\text{для } \Phi_0=36^\circ: \qquad \frac{M}{R}=-0.9634\frac{\mu V2R}{a},\\ &\text{для } \Phi_0=37^\circ: \qquad \frac{M}{R}=-0.9656\frac{\mu V2R}{a}. \end{aligned}\right\} \qquad \begin{matrix}(64)\\ c=0.4\end{matrix}$$

5) Для $c=0.5$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{для } \Phi_0=43^\circ: & X_1=-0.26965, & X_3=-0.94962,\\ \text{для } \Phi_0=44^\circ: & X_1=-0.29153, & X_3=-0.95307,\\ \text{для } \Phi_0=45^\circ: & X_1=-0.30310, & X_3=-0.95688; \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}(62)\\ c=0.5\end{array}$$

$$\text{для } \Phi_0=43^\circ: \qquad S_{0,5}=-0.00081+0.62\frac{a}{R},$$

$$\text{для } \Phi_0=44^\circ: \qquad S_{0,5}=-0.01000+0.62\frac{a}{R},$$

и так как

$$0.62\frac{a}{R}<0.0004,$$

то, вычисляя с точностью до четвертого десятичного знака, имеем

$$43^\circ<\Phi_0<44^\circ.$$

Из уравнений (58) и (55) выводят

$$\text{для } \Phi_0=43^\circ: \qquad \frac{L}{R}=-\frac{\mu VR}{a^2}\left[0.1782-0.12\frac{a}{R}\right],$$

$$\text{для } \Phi_0=44^\circ: \qquad \frac{L}{R}=-\frac{\mu VR}{a^2}\left[0.1860-0.11\frac{a}{R}\right];$$

остановившись на трех первых десятичных знаках, получим

$$\left.\begin{array}{ll} \text{для } \Phi_0=43^\circ: & \dfrac{L}{R}=-0.1782\dfrac{\mu VR}{a^2},\\ \text{для } \Phi_0=44^\circ: & \dfrac{L}{R}=-0.1860\dfrac{\mu VR}{a^2}. \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}(63)\\ c=0.5\end{array}$$

Из уравнений (59) и (57) имеем

$$\left.\begin{array}{ll} \text{для } \Phi_0=43^\circ: & \dfrac{M}{R}=-0.997\dfrac{\mu V2R}{a},\\ \text{для } \Phi_0=44^\circ: & \dfrac{M}{R}=-1.001\dfrac{\mu V2R}{a}. \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}(64)\\ c=0.5\end{array}$$

6) Для $c=0.6$

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\text{для } \Phi_0=45^\circ: & X_1=-0.29661, & X_3=-0.96415, \\
\text{для } \Phi_0=46^\circ: & X_1=-0.31274, & X_3=-0.96732, \\
\text{для } \Phi_0=47^\circ: & X_1=-0.32881, & X_3=-0.97124,
\end{array}
\right\}
\begin{array}{c}(62)\\ c=0.6\end{array}
$$

и

$$\text{для } \Phi_0=45^\circ: \quad S_{0,6}=-0.00014+0.6\frac{a}{R},$$

$$\text{для } \Phi_0=46^\circ: \quad S_{0,6}=-0.00005+0.6\frac{a}{R},$$

$$\text{для } \Phi_0=47^\circ: \quad S_{0,6}=-0.00404+0.6\frac{a}{R}.$$

Так как

$$0.00003<0.6\frac{a}{R}<0.00040,$$

то искомый угол Φ_0 во всех случаях, где a не имеет исключительно малых значений, будет заключен в пределах от 46° до 47°, т. е.

$$46^\circ<\Phi_0<47^\circ.$$

Для особо малых значений a, и только в этом случае, Φ_0 будет находиться между 45° и 46°.

Уравнения (58) и (55) дают

$$\text{для } \Phi_0=46^\circ: \quad \frac{L}{R}=-\frac{\mu VR}{a^2}\left[0.1676-0.36\frac{a}{R}\right],$$

$$\text{для } \Phi_0=47^\circ: \quad \frac{L}{R}=-\frac{\mu VR}{a^2}\left[0.1667-0.33\frac{a}{R}\right],$$

и так как

$$0.36\frac{a}{R}<0.0002,$$

то имеем с точностью до трех первых знаков

$$\left.\begin{aligned} &\text{для } \Phi_0=46^\circ: \quad \frac{L}{R}=-0.1676\,\frac{\mu VR}{a^2}, \\ &\text{для } \Phi_0=47^\circ: \quad \frac{L}{R}=-0.1667\,\frac{\mu VR}{a^2}. \end{aligned}\right\} \quad (63)_{c=0.6}$$

Уравнения (59) и (56) дают

$$\begin{aligned} &\text{для } \Phi_0=46^\circ: \quad \frac{M}{R}=-1.241\,\frac{\mu V 2R}{a}, \\ &\text{для } \Phi_0=47^\circ: \quad \frac{M}{R}=-1.267\,\frac{\mu V 2R}{a} \end{aligned} \quad (64)_{c=0.6}$$

Чтобы приближенно разрешить вопрос, какие точные значения a и c соответствуют данным, полученным экспериментально, положим для:

$c=0,\ \frac{L}{R}=0 \quad (65)_{c=0};\ \frac{M}{R}=-0.6714\,\frac{\mu V 2R}{a};(66)_{c=0}$

$c=0.1;\ \frac{L}{R}=-0.0226\,\frac{\mu VR}{a^2};\ (65)_{c=0,1};\ \frac{M}{R}=-0.6884\,\frac{\mu V 2R}{a};(66)_{c=1}$

$c=0.2;\ \frac{L}{R}=-0.0479\,\frac{\mu VR}{a^2};\ (65)_{c=0,2};\ \frac{M}{R}=-0.7521\,\frac{\mu V 2R}{a};(66)_{c=0,2}$

$c=0.3;\ \frac{L}{R}=-0.0807\,\frac{\mu VR}{a^2};\ (65)_{c=0,3};\ \frac{M}{R}=-0.8064\,\frac{\mu V 2R}{a};(66)_{c=0,3}$

$c=0.4;\ \frac{L}{R}=-0.1615\,\frac{\mu VR}{a^2};\ (65)_{c=0,4};\ \frac{M}{R}=-0.9645\,\frac{\mu V 2R}{a};(66)_{c=0,4}$

$c=0.5;\ \frac{L}{R}=-0.1820\,\frac{\mu VR}{a^2};\ (65)_{c=0,5};\ \frac{M}{R}=-1.000\,\frac{\mu V 2R}{a};(66)_{c=0,5}$

$c=0.6;\ \frac{L}{R}=-0.1675\,\frac{\mu VR}{a^2};\ (65)_{c=0,6};\ \frac{M}{R}=-1.254\,\frac{\mu V 2R}{a};\ (66)_{c=0.6}$

Эти уравнения показывают, что по мере увеличения c происходит увеличение угла Φ_0 и увеличение силы трения;

но сила, поддерживающая подшипник, возрастает только до $c=0.5$; выше этого значения c эта сила уменьшается и вблизи $c=0.6$ и для больших величин закон движения жидкости в слое изменяется еще непонятным образом. От $c=0$ до $c=0.4$ изменения L и M, зависящие от изменений c, находятся в такой правильной прогрессии, что без больших ошибок можно определить промежуточные числа с помощью линейных интерполяций.

Для приближенного решения с указанной степенью точности вопроса, каковы величины a, c и прочие, соответствующие данным, полученным из моих опытов, можно сделать еще некоторые упрощения.

Представим уравнения (65) и (66) в виде

$$L=\beta R^2 \frac{\mu V}{a^2}, \tag{67}$$

$$F=\gamma R \frac{\mu V}{a}, \tag{68}$$

где β и γ суть числовые коэффициенты в уравнениях (65) и (66) для различных значений c, и F — сила трения на поверхности шипа, приведенная к единице длины этой поверхности.

Можно заменить эти два уравнения двумя следующими:

$$a=\frac{\beta}{\gamma}\frac{F}{L} R, \tag{69}$$

$$a=\gamma\frac{\mu V}{F} R. \tag{70}$$

Вычисленные величины $\frac{\beta}{\gamma} R$ и γR для различных значений c указаны в следующей таблице:

Таблица 8

Величины c, φ_0, $\frac{\beta}{\gamma}R$ и γR

c	Φ_0	$\frac{\beta}{\gamma}R$	γR	$\frac{\gamma}{R\beta}$
0	0	0	40.284	∞
0.1	15.5°	0.4926	41.304	2.030
0.2	21.5	0.9990	43.506	1.001
0.3	34.5	1.801	48.384	0.555
0.4	36.5	2.512	57.870	0.398
0.5	43.5	2.730	60.000	0.366
0.6	46.5	2.004	75.240	0.500

§ 16. *Определение величины a и всех других величин*

В каждое из уравнений (69) следует подставить отношение F/c, определенное из опытов, и найти соответствующие значения a.

Также следует внести в уравнения (70) значения F, μ и V, найденные в тех же опытах, и получить соответствующие значения a. Другая группа уравнений (69) и (70), которая дает идентичные значения a, выводимые из того или другого уравнения, определит искомую группу величин a, c, Φ_0, X_1 и X_3. После нахождения этих величин нетрудно вывести из уравнений $(25)_1$ и $(25)_3$ углы Φ_1 и Φ_3, соответствующие наибольшим гидродинамическим давлениям; при помощи уравнений $(28)_1$, $(28)_3$ определяются величины гидродинамических давлений P_1 и P_3, соответствующие произвольно выбранным величинам углов θ.

Величины R, L, M, μ, V надо взять из моей работы „Описание и результаты опытов над трением жидкости и машин“. В этой работе полное давление на два подшипника,

ТРЕТЬЯ СЕ

Нагрузка $L_1 = 174.7$ кг; средняя темпе

№ п/п.	Название жидкости	Число оборотов цапфы в тыс.	F мг	F/L	μV
113	Смесь № 67	67	3844	0.008098	4.617
114	Темное минеральное масло № 62 . .	22	6088	0.012804	8.260
115		3	6060	0.012766	8.360
116		4	6046	0.012736	8.321
117		17	6020	0.012682	8.278
118	Светлое минеральное масло № 63 . .	4	4303	0.009065	5.764
119		10	4282	0.009020	5.709
120		10	4242	0.008936	5.634
121		5	4242	0.008936	5.615
122		7	4383	0.009233	5.714
123		10	4379	0.009225	5.721
124		9	4361	0.009186	5.794
125		5	4331	0.009124	5.720
126	Сурепное масло	23	4101	0.008640	5.216
127		8	4140	0.008721	5.216

Таблица 9 (Группа 1)

РИЯ ОПЫТОВ

ратура подшипника от 37.9 до 42.6°

Определение величины a, мм						Интерполированные значения		Температура подшипника во время опыта, $t°$
для $c=0.1$ по уравнениям		для $c=0.2$ по уравнениям		для $c=0.3$ по уравнениям				
(68)	(67)	(68)	(67)	(68)	(67)	c	a	
0.00825	0.00399	0.00868	0.00809	0.00966	0.01458	**0.210**	**0.00878**	**38.3**
0.00940	0.00631	0.00989	0.01279	—	—	**0.151**	**0.00965**	**42.4**
0.00955	0.00625	0.01005	0.01275	—	—	**0.152**	**0.00980**	**42.4**
0.00953	0.00627	0.01003	0.01272	—	—	**0.152**	**0.00983**	**42.5**
0.00952	0.00625	0.01002	0.01267	—	—	**0.152**	**0.00978**	**42.6**
—	—	0.00976	0.00906	0.01086	0.01633	**0.211**	**0.00988**	**38.3**
—	—	0.00972	0.00901	0.01081	0.01624	**0.211**	**0.00984**	**38.4**
—	—	0.00968	0.00893	0.01076	0.01609	**0.212**	**0.00981**	**38.7**
—	—	0.00964	0.00893	0.01072	0.01609	**0.212**	**0.00977**	**38.7**
—	—	0.00950	0.00922	0.01057	0.01663	**0.204**	**0.00954**	**38.5**
—	—	0.00953	0.00922	0.01059	0.01661	**0.205**	**0.00958**	**38.2**
—	—	0.00977	0.00918	0.01087	0.01654	**0.210**	**0.00988**	**38.1**
—	—	0.00962	0.00911	0.01070	0.01643	**0.209**	**0.00972**	**38.3**
—	—	0.00927	0.00863	0.01300	0.01556	**0.211**	**0.00938**	**37.9**
—	—	0.00924	0.00871	0.01028	0.01574	**0.209**	**0.00933**	**37.9**

Средняя температура

№ п/п.	Название жидкости	Число оборотов папфы в тыс.	F, мг	F/L	μV
128	Темное минеральное масло № 62 . .	21	5993	0.012645	8.538
129	Прозрачное минеральное масло № 63	13	4262	0.008978	6.003
130		5	4266	0.008987	6.173
131		5	4128	0.008886	5.885
132		10	4153	0.008749	5.842
133		10	4125	0.008689	5.800
134		11	4062	0.008557	5.641
135		13	4040	0.008511	5.606
136	Сурепное масло	24	4767	0.009850	6.461
137		24	4282	0.009020	5.913
138		14	4272	0.009000	5.885
139	Темное минеральное масло № 62 . .	11	5001	0.010535	7.489
140		11	5082	0.010706	7.459
141		7	3717	0.007830	4.538
142		9	3644	0.007653	4.470
143		7	3602	0.007575	4.363
144		8	3646	0.007680	4.409
145	Смесь № 69	9	3596	0.007552	4.367
146		12	3547	0.007448	4.379
147		12	3519	0.007434	4.336
148		12	3494	0.007359	4.212
149		12	3515	0.007404	4.258

Таблица 10 (Группа 2)

подшипника от 46.1 до 51.7°

Определение величины a, мм						Интерполированные значения		Температура подшипника во время опыта, $t°$
для $c=0.1$ по уравнениям		для $c=0.2$ по уравнениям		для $c=0.3$ по уравнениям				
(68)	(67)	(68)	(67)	(68)	(67)	c	a	
0.00938	0.00623	0.01039	0.01263	—	—	**0.160**	**0.01017**	**50.3**
—	—	0.01026	0.00897	0.01141	0.01617	**0.221**	**0.01050**	**48.5**
—	—	0.01038	0.00898	0.01154	0.01619	**0.228**	**0.01070**	**48.8**
—	—	0.01017	0.00888	0.01131	0.01600	**0.222**	**0.01041**	**49.2**
—	—	0.01025	0.00874	0.01140	0.01576	**0.225**	**0.01050**	**49.5**
—	—	0.01025	0.00868	0.01140	0.01565	**0.226**	**0.01054**	**49.7**
—	—	0.01012	0.00855	0.01125	0.01541	**0.227**	**0.01042**	**49.7**
—	—	0.01012	0.00850	0.01125	0.01533	**0.228**	**0.01043**	**49.9**
—	—	0.00988	0.00984	0.01099	0.01774	**0.200**	**0.00988**	**50.3**
—	—	0.01007	0.00901	0.01131	0.01624	**0.212**	**0.01028**	**51.1**
—	—	0.01004	0.00899	0.01129	0.01620	**0.217**	**0.01025**	**51.7**
—	—	0.01088	0.01052	0.01209	0.01897	**0.205**	**0.01094**	**49.2**
—	—	0.01069	0.01070	0.01189	0.01928	**0.200**	**0.01070**	**49.3**
—	—	0.00890	0.00782	0.00990	0.01410	**0.220**	**0.00910**	**45.8**
—	—	0.00890	0.00764	0.00990	0.01378	**0.224**	**0.00914**	**46.1**
—	—	0.00883	0.00756	0.00982	0.01364	**0.225**	**0.00908**	**46.2**
—	—	0.00886	0.00767	0.00985	0.01383	**0.223**	**0.00909**	**46.1**
—	—	0.00884	0.00754	0.00984	0.01360	**0.226**	**0.00910**	**46.7**
—	—	0.00900	0.00744	0.01000	0.01341	**0.231**	**0.00931**	**46.7**
—	—	0.00893	0.00743	0.00993	0.01339	**0.230**	**0.00913**	**46.9**
—	—	0.00879	0.00735	0.00978	0.01325	**0.230**	**0.00909**	**47.0**
—	—	0.00877	0.00740	0.00975	0.01333	**0.228**	**0.00905**	**46.8**

Средняя температура под

№ п/п.	Название жидкости	Число оборотов цапфы в тыс.	F, мг	F/L	μV
150	Олеонид № 68	10	2171	0.004573	2.108
151		11	2155	0.004540	2.125
152		13	2161	0.004552	2.114
153		9	2182	0.004594	2.112
154		23	2169	0.004569	2.094
155		23	2145	0.004519	1.970
156	Прозрачное минеральное масло № 63	8	4343	0.009149	5.903
157		8	4242	0.008936	5.737
158		8	4196	0.008840	5.660
159		22	4092	0.008620	5.588
160	Олеонид № 68	8	2283	0.004809	2.296
161		14	2293	0.004830	2.273
162		22	2299	0.004843	2.239

Средняя температура

№ п/п.	Название жидкости	Число оборотов цапфы в тыс.	F, мг	F/L	μV
163	Олеонид № 68	7	1309	0.002757	0.792
164		6	1299	0.002736	0.798
165		11	1283	0.002703	0.775
166		5	1267	0.002670	0.769

Таблица 11 (Группа 3)

шипника от 41.0 до 38.8°

Определение величины a, мм						Интерполированные значения		Температура подшипника во время опыта, $t°$
для $c=0.1$ по уравнениям		для $c=0.2$ по уравнениям		для $c=0.3$ по уравнениям				
(68)	(67)	(68)	(67)	(68)	(67)	c	a	
—	—	0.00707	0.00457	0.00787	0.00823	**0.287**	**0.00777**	**40.0**
—	—	0.00707	0.00453	0.00787	0.00818	**0.289**	**0.00778**	**39.8**
—	—	0.00713	0.00455	0.00793	0.00820	**0.290**	**0.00785**	**39.6**
—	—	0.00703	0.00459	0.00782	0.00827	**0.285**	**0.00771**	**39.5**
—	—	0.00711	0.00456	0.00790	0.00827	**0.290**	**0.00783**	**39.4**
—	—	0.00737	0.00451	0.00819	0.00814	**0.300**	**0.00820**	**41.0**
—	—	0.00991	0.00914	0.01103	0.01648	**0.214**	**0.01003**	**39.2**
—	—	0.00989	0.00892	0.01097	0.01609	**0.215**	**0.00996**	**39.7**
—	—	0.00984	0.00883	0.01094	0.01592	**0.217**	**0.01001**	**40.0**
—	—	0.00996	0.00861	0.01107	0.01522	**0.225**	**0.01021**	**40.2**
—	—	0.00755	0.00480	0.00839	0.00866	**0.290**	**0.00830**	**31.1**
—	—	0.00724	0.00483	0.00805	0.00870	**0.280**	**0.00788**	**38.8**
—	—	0.00713	0.00484	0.00793	0.00872	**0.274**	**0.00773**	**38.8**

Таблица 12 (Группа 4)

подшипника от 18.5 до 18.8°

Определение величины a, мм						Интерполированные значения		Температура подшипника во время опыта, $t°$
для $c=0.1$ по уравнениям		для $c=0.2$ по уравнениям		для $c=0.3$ по уравнениям				
(68)	(67)	(68)	(67)	(68)	(67)	c	a	
0.00442	0.00275	0.00490	0.00497	0.00585	0.00693	**0.300**	**0.00490**	**18.8**
0.00453	0.00273	0.00497	0.00493	0.00594	0.00687	**0.300**	**0.00497**	**18.5**
0.00442	0.00270	0.00490	0.00487	0.00585	0.00679	**0.300**	**0.00490**	**18.7**
0.00454	0.00267	0.00492	0.00481	0.00588	0.00671	**0.310**	**0.00502**	**18.8**

Средняя температура

№ п/п.	Название жидкости	Число оборотов цапфы в тыс.	F, мг	F/L	μV
167	Олеонид № 68	6	2117	0.004460	2.173
168		6	2081	0.004384	2.124
169		6	2020	0.004355	2.031
170	Темное минеральное масло № 70 . .	19	4666	0.008919	5.987

ЧЕТВЕРТАЯ СЕ

Полная нагрузка $L = 2844$ кг; средняя

№ п/п.	Название жидкости	Число оборотов цапфы в тыс.	F, мг	F/L	μV
171	Темное минеральное масло № 70 . .	23	7107	0.002495	4.400
172		6	7083	0.002469	4.334
173		8	7494	0.002633	3.791

Таблица 13 (Группа 5)

подшипника от 40.2 до 39.3°

Определение величины a, мм						Интерполированные значения		Температура подшипника во время опытов, $t°$
для $c=0.2$ по уравнениям		для $c=0.3$ по уравнениям		для $c=0.4$ по уравнениям				
(68)	(67)	(68)	(67)	(68)	(67)	c	a	
0.00748	0.00456	0.00832	0.00803	0.00994	0.01120	**0.218**	**0.00861**	**39.3**
0.00744	0.00438	0.00827	0.00790	0.00989	0.01101	**0.225**	**0.00867**	**39.8**
0.00726	0.00435	0.00807	0.00784	0.00964	0.01093	**0.215**	**0.00831**	**40.2**
$c=0.1$		$c=0.2$		$c=0.3$				
0.00890	0.00484	0.00936	0.00981	—	—	**0.190**	**0.00894**	**40.2**

Таблица 14

РИЯ ОПЫТОВ

температура слоя от 37.9 до 45.2°

Определение величины a, мм						Интерполированные значения		Температура подшипника во время опытов, $t°$
для $c=0.2$ по уравнениям		для $c=0.3$ по уравнениям		для $c=0.4$ по уравнениям				
(68)	(67)	(68)	(67)	(68)	(67)	c	a	
0.00451	0.00246	0.00502	0.00443	0.00600	0.00618	**0.375**	**0.00577**	**45.0**
0.00449	0.00247	0.00500	0.00445	0.00597	0.00620	**0.370**	**0.00570**	**45.2**
0.00368	0.00263	0.00410	0.00479	0.00489	0.00661	**0.260**	**0.00393**	**37.9**

ПЯТАЯ СЕ

Полная нагрузка $L = 2470$ кг; средняя

№ п/п.	Название жидкости	Число оборотов цапфы в тыс.	F, мг	F/L	μV
174	Темное минеральное масло № 93 . .	12	10637	0.004319	6.903
175	Темное минеральное масло № 94 . .	6	7112	0.002880	3.981
176		12	7200	0.002915	4.002
177		8	7112	0.002880	4.041
178		10	7112	0.002880	4.092
179	Смесь № 95	24	6282	0.002540	2.076
180		12	5795	0.002346	2.204
181		25	5707	0.002310	2.410
182		7	5707	0.002310	2.374
183		13	5663	0.002292	2.366
184		17	5619	0.002291	2.384
185	Сурепное масло	12	6980	0.002822	3.018
186		11	6936	0.002808	3.018
187		7	6936	0.002808	3.083
188		8	6893	0.002500	2.972
189	Спермацетовое масло	12	5092	0.002061	1.497
190		10	5224	0.002115	1.478
191	Олеонид № 68	12	4871	0.001974	1.089
192		20	4935	0.002000	0.057

Таблица 15

РИЯ ОПЫТОВ

температура слоя от 42.3 до 51.8°

Определение величины a, мм						Интерполированные значения		Температура подшипника во время опыта, t°
по уравнениям		по уравнениям		по уравнениям				
(68)	(67)	(68)	(67)	(68)	(67)	c	a	
—	—	0.00472	0.00315	0.00525	0.00778	**0.228**	**0.00487**	**49.7**
—	—	0.00408	0.00287	0.00454	0.00519	**0.265**	**0.00438**	**48.4**
—	—	0.00405	0.00291	0.00450	0.00525	**0.260**	**0.00432**	**48.2**
—	—	0.00414	0.00288	0.00460	0.00519	**0.268**	**0.00451**	**48.3**
—	—	0.00419	0.00288	0.00466	0.00519	**0.271**	**0.00452**	**48.1**
0.00229	0.00125	0.00241	0.00253	—	—	**0.190**	**0.00239**	**48.3**
—	—	0.00278	0.00234	0.00309	0.00422	**0.228**	**0.00287**	**47.3**
—	—	0.00308	0.00231	0.00342	0.00416	**0.251**	**0.00325**	**50.1**
—	—	0.00302	0.00231	0.00336	0.00416	**0.247**	**0.00318**	**50.2**
—	—	0.00305	0.00229	0.00339	0.00413	**0.250**	**0.00322**	**50.4**
—	—	0.00310	0.00229	0.00345	0.00413	**0.254**	**0.00329**	**50.6**
—	—	0.00315	0.00282	0.00351	0.00508	**0.217**	**0.00321**	**47.1**
—	—	0.00318	0.00281	0.00353	0.00506	**0.220**	**0.00325**	**47.1**
—	—	0.00324	0.00281	0.00360	0.00506	**0.223**	**0.00332**	**51.8**
—	—	0.00308	0.00280	0.00342	0.00504	**0.214**	**0.00313**	**52.0**
—	—	0.00215	0.00206	0.00241	0.00371	**0.207**	**0.00217**	**42.3**
0.00196	0.00104	0.00206	0.00211	—	—	**0.200**	**0.00206**	**42.8**
0.00149	0.00097	0.00157	0.00197	—	—	**0.160**	**0.00154**	**43.3**
0.00147	0.00099	0.00154	0.00200	—	—	**0.150**	**0.00151**	**43.4**

Таблица 16

ТРЕТЬЯ СЕРИЯ ОПЫТОВ

Нагрузка $L = 474.7$ *кг*

№ п/п.	Название жидкости	Число оборотов цапфы в тыс.	Среднее F	F/L	μV	Средние величины		
						c	a	$t°$
113	Смесь № 67	16	3814	0.008098	4.617	**0.210**	**0.00876**	**38.3**
114—117	Темное минеральное масло № 62 . .	46	6053	0.012747	8.305	**0.152**	**0.00976**	**42.5**
118—125	Прозрачное минеральное масло № 63	60	4315	0.009090	5.709	**0.209**	**0.00975**	**38.4**
126—127	Сурепное масло	31	4120	0.008680	5.216	**0.210**	**0.00935**	**37.9**

Таблица 17

Нагрузка $L = 474.7$ *кг*

№ п/п.	Название жидкости	Число оборотов цапфы в тыс.	Среднее F	F/L	μV	Средние величины		
						c	a	$t°$
128	Темное минеральное масло № 62 . .	21	5993	0.012645	8.538	**0.160**	**0.01017**	**50.3**
129—135	Прозрачное минеральное масло № 63	67	4161	0.008754	5.870	**0.225**	**0.01050**	**49.3**
136—138	Сурепное масло	62	4440	0.009290	6.086	**0.210**	**0.01014**	**51.0**
139—140	Темное минеральное масло № 62 . . .	22	5042	0.010620	7.459	**0.202**	**0.01082**	**49.2**
141—149	Смесь № 69	88	3590	0.007548	4.370	**0.226**	**0.00912**	**46.4**

Таблица 18

Нагрузка $L = 474.7$ кг

№ п/п.	Название жидкости	Число оборотов цапфы в тыс.	Среднее F	F/L	μV	Средние величины		
						c	a	t°
150—155	Олеонид № 68	89	2164	0.004558	2.090	**0.290**	**0.00786**	**39.9**
156—159	Прозрачное минеральное масло № 63	46	4218	0.008886	5.772	**0.218**	**0.01005**	**40.0**
160—162	Олеонид № 68	44	2292	0.004827	2.269	**0.281**	**0.00797**	**38.9**

Таблица 19

Нагрузка $L = 474.7$ кг

№ п/п.	Название жидкости	Число оборотов цапфы в тыс.	Среднее F	F/L	μV	Средние величины		
						c	a	t°
163—166	Олеонид № 68	29	1290	0.002715	0.784	**0.302**	**0.00495**	**18.7**

Таблица 20

Нагрузка $L = 474.7$ кг

№ п/п.	Название жидкости	Число оборотов цапфы в тыс.	Среднее F	F/L	μV	Средние величины		
						c	a	t°
167—169	Олеонид № 68	18	2071	0.004400	2.109	**0.220**	**0.00853**	**39.8**
170	Темное минеральное масло № 70 . .	19	4666	0.008919	5.987	**0.190**	**0.00894**	**40.2**

Таблица 21

ЧЕТВЕРТАЯ СЕРИЯ ОПЫТОВ

Нагрузка $L = 2844$ кг

№ п/п.	Название жидкости	Число оборотов цапфы в тыс.	Среднее F	F/L	μV	Средние величины		
						c	a	$t°$
171—172	Темное минеральное масло № 70 . . .	29	7107	0.002480	4.367	**0.372**	**0.00573**	**45.1**
173		8	7494	0.002633	3.791	**0.260**	**0.00393**	**37.9**

Таблица 22

ПЯТАЯ СЕРИЯ ОПЫТОВ

Нагрузка $L = 2470$ кг

№ п/п.	Название жидкости	Число оборотов цапфы в тыс.	Среднее F	F/L	μV	Средние величины		
						c	a	$t°$
174	Темное минеральное масло № 93 . .	12	10667	0.004319	6.903	**0.228**	**0.00487**	**49.1**
175—178	Темное минеральное масло № 94 . .	36	7154	0.002889	4.019	**0.226**	**0.00443**	**48.2**
179	Смесь № 95	24	6272	0.002540	2.076	**0.190**	**0.00239**	**48.2**
180—184		74	5700	0.002310	2.348	**0.246**	**0.00316**	**49.7**
185—186	Сурепное масло	23	6958	0.002815	3.018	**0.218**	**0.00323**	**47.1**
187—188		15	6918	0.002804	3.028	**0.219**	**0.00322**	**51.9**
189—190	Спермацетовое масло	22	5158	0.002088	1.486	**0.210**	**0.00212**	**42.5**
191—192	Олеонид № 68	32	4905	0.001987	1.074	**0.155**	**0.00153**	**43.3**

верхний и нижний, симметрично расположенные и подобные по форме, обозначенное через P, выражено в килограммах, а длина цапфы $l=71$ в миллиметрах. Так как на краях цапфы подшипник соприкасается с нею по непрерывной полосе, длина дуги которой больше, чем дуга прикосновения на средней, гораздо большей части длины цапфы, то для определения нагрузки, приходящейся на единицу длины этой средней части, наиболее важной в подшипнике, надо разделить всю нагрузку не на 71, а на 85. Отсюда

$$L=\frac{1\,000\,000}{2\times 85}P=5882\,P. \tag{71}$$

Сила трения F, указанная в моих таблицах, выражена в граммах, радиус $R=30$ мм, следовательно, сила трения F, отнесенная к единице длины цапфы, выраженная в миллиграммах, определяется из уравнения

$$F=\frac{1000}{2\times 85}P=5.882\,P. \tag{72}$$

Скорость v при указанных вычислениях должна быть выражена через действительную скорость V, при помощи соотношения $v=-V$. Произведения μU могут быть найдены при помощи данных, приведенных в таблицах.

Посредством указанных уравнений и данных относительно моих опытов, проведенных на машине Клейна, Шанцлина, было составлено 14 таблиц (9—22), в которых искомые величины a и c, найденные интерполяцией, напечатаны жирным шрифтом.

§ 17. Точность определений a и c, указанных в табл. 9—22

Эта точность находится в прямой зависимости от большого числа гипотез, допущенных при выводе уравнений для определения a и c и, сверх того, от большей или меньшей значимости ошибок, допущенных при наблюдениях.

Определить пределы ошибок при помощи анализа указанных условий совершенно невозможно, поэтому следует только перечислить допущенные гипотезы и, поскольку возможно, обследовать, как они согласуются с действительным положением вещей.

Прежде всего в начале вычислений мы пренебрегли силами инерции.[14] Действительно при крайне малой толщине жидкого слоя и, следовательно, для чрезвычайно малой массы жидкости, быстро изменяющей свою скорость при прохождении по подшипнику, силы инерции, по всей вероятности, будут достаточно малы, чтобы ими можно было пренебречь.

Форма поверхности рассматривается как неизменная и никак не учитывается при прохождении жидких частиц под подшипником и при выходе из-под подшипника, но в действительности имеется основание предполагать, что эта форма действительно влияет на определение количества жидкости, которая проходит под подшипником. К этому заключению привела меня пятая серия моих опытов.

После четвертой серии опытов, проведенных при наибольшей нагрузке на подшипник в 2844 кг вместо нагрузки в 474.7 кг, которая была при третьей серии опытов, приступили к пятой серии опытов с нагрузкой в 2470 кг на подшипник. В то время как в третьей серии опытов жидкость протекала под подшипником в значительном изобилии (от 7 до 17 г/мин), а в четвертой серии она проходила в количестве около 2 г, в пятой серии опытов, проведенных после довольно продолжительного бездействия машин, количество жидкости, которое проходило под подшипником, было исключительно мало. Следовательно, без риска ошибок в выводах нельзя рассматривать форму смазанных поверхностей как неизменную.

Затем было предположено, что коэффициенты трения жидкости с твердыми телами крайне большие.

Это предположение принято, несмотря на некоторые условия, которые показывают, как сказано было выше, что члены содержащихся в знаменателях дробей вторых членов уравнений (53) и (54) зависят от трения жидкого слоя с твердыми телами и не настолько малы, чтобы ими можно было пренебречь, сравнительно с толщиною слоя, не делая при этом значительных ошибок. Наконец, исключительно трудно определить надлежащим образом границы ошибок при наблюдениях, несмотря на всю их важность.

Однако есть способ получить достаточную оценку величины *a*. Этот способ основан на разности расширения различных металлов. Так как цапфа была стальная, а подшипник — бронзовый, то при температурных изменениях разница их радиусов должна также меняться.

В таблицах указаны температуры подшипника в непосредственном контакте со смазочным слоем. Цапфа, нагревающаяся, как и подшипник, вследствие трения в смазочном слое, должна иметь приблизительно ту же температуру, что и подшипник. Так как коэффициент расширения стали, считая на 1° и на единицу длины, может быть принят 0.000011 и для бронзы 0.000018, то можно сказать, что разность радиусов подшипника и цапфы при изменении температуры на 1° должна быть 0.000007 на единицу длины, а следовательно, при радиусе цапфы $R=30$ мм упомянутая разность при изменении температуры на 1° должна составлять 0.00021 мм. Не только ошибки, сделанные в пятой цифре, но также ошибки, сделанные в четвертой цифре чисел, определяющих величину *a* и указанных в таблице, не позволяют проследить влияние температуры при сравнении чисел, относящихся к отдельным опытам. Удовлетворительные результаты можно получить только путем сравнения между собою групп опытов, произведенных при значительно отличающихся температурах.

Если в третьей серии опытов составить три группы: группу I для температуры около 50° (опыты № 128—140),

группу II для температуры около 40° (опыты № 113—127, 150—162, 167—170) и группу III для температуры 18.7° (опыты № 163—166), то можно найти для этих групп следующие средние значения температуры t и величины a, указанные в табл. 23:

Таблица 23

I	$t = 49.8°$	$a = 0.01044$ мм
II	$t = 39.5°$	$a = 0.00907$ »
III	$t = 18.7°$	$a = 0.00495$ »

Сравнение групп I и III показывает, что величина a изменяется на 0.00018 мм при изменении температуры на 1°. Сравнение групп II и III показывает, что a изменяется на 0.00020 мм при изменении температуры на 1°.

Эти почти тождественные результаты показывают, что описанные опыты, вопреки всей трудности наблюдений и вопреки большому числу причин, влияющих на полученные числовые значения, дают достаточно удовлетворительные результаты и что, следовательно, возможно, опираясь на них, притти к довольно правильным выводам.

§ 18. Гидродинамическое давление в различных точках жидкого слоя

Эти давления не были определены в течение моих опытов. Поэтому нельзя произвести сравнения между гидродинамическими давлениями, вычисленными на основании вышеизложенной теории, и давлениями, полученными в действительности при опытах. Но так как эти давления были достаточно вычислены Осборном Рейнольдсом и, кроме того, так как вышеприведенные соображения показывают приложимость теории к моим опытам, то можно для этих опытов также определить гидродинамические давления в раз-

личных точках смазочного слоя. Для вычислений этих давлений пользуются уравнениями $(28)_1$ и $(28)_3$, которые можно, очевидно, написать в форме

$$p - p_0 = \delta R \frac{\mu V}{a^2}.$$

Из уравнения (72) и уравнения (67) получаем

$$p - p_0 = \frac{\delta}{\beta} \frac{L}{R}. \qquad (73)$$

Если вместо L написать вторую часть уравнения (71) и если величина P выражена в атмосферах, принимая ее за 10 333 мг на квадратный миллиметр, то уравнение, приложимое к моим опытам, будет

$$p = p_0 + \frac{5882}{10333} \frac{\delta}{\beta R} P = p_0 + 0.569 \frac{\delta}{\beta R} P. \qquad (74)$$

Величины углов Φ_1 и Φ_3, которым соответствуют наивысшие давления на правой и левой частях подшипника, который служил при опытах, величины $\frac{1}{\beta R}$, определенные при помощи табл. 8, и величины δ, вычисленные в соответствии с различными значениями c, от $c = 0.1$ до $c = 0.6$, и также в соответствии со значениями угла θ: 40, 30, 20, -20, -30, $-40°$, указаны в следующей таблице (см. табл. 24 на стр. 468).

Срединам правой и левой частей подшипника соответствуют углы $\theta = 30°46'$ и $\theta = -30°46'$. Отсюда видно, что наибольшие гидродинамические давления проявляются не вдоль средних образующих правой и левой частей подшипника, но в точках, более близких к их срединам, и что, следовательно, чем больше сжатие слоя c, тем ближе к средине образующей действуют наибольшие гидродинамические давления.

Таблица 24

c	φ_0	φ_1	φ_3	$\frac{1}{\beta R}$	δ: $\theta=40°$	$\theta=30°$	$\theta=20°$	$\theta=-20°$	$\theta=-30°$	$\theta=-40°$
0.1	15°30′	29°52′	—30°9′	1.475	0.021	0.029	0 018	0.018	0.029	0.022
0.2	21 30	29 23	—30 16	0.690	0.043	0.062	0.044	0.044	0.067	0.049
0.3	34 30	29 57	—29 25	0.344	0.072	0.108	0.081	0.081	0.0 5	0.062
0.4	36 30	30 46	—30 47	0.206	0.055	0.096	0.08[illegible]	0 084	0.215	0.153
0.5	43 30	27 [illegible]1	—28 44	0.183	0.1[illegible]0	0.231	0.192	0.192	0.300	0.195
0.6	46 30	27 48	—28 59	0.199	0.201	0.324	0.284	0.284	0.680	0.324

Давления p, возникающие в слое под влиянием давлений, существующих в третьей и пятой сериях наблюдений, имели значения, близкие к значениям, указанным в приведенных ниже табл. 25 и 26.

Таблица 25

Относящаяся к третьей серии опытов для $p = 47.4$ кг и со средним давлением до 8.9 атм

Значения $p - p_0$

c	$t=40°$	$t=30°$	$t=20°$	$t=-20°$	$t=-30°$	$t=-40°$
0.15	9.3	13.1	9.1	10.2	14.0	9.3
0.20	8.0	11.5	8.2	8.8	12.5	9.1
0.30	7.5	10.0	7.5	4.7	7.9	5.8

§ 19. *Главные выводы из расчетов, относящихся к моим опытам*

1) Величина сжатия жидкого слоя c не столько зависит от величины нагрузки на этот слой, сколько от разности радиусов подшипника и цапфы в рассматриваемый момент.

Таблица 26

Относящаяся к пятой серии опытов для $p = 2470$ кг и со средним давлением до 45.2 атм

Значения $p - p_0$

c	$t = 40°$	$t = 30°$	$t = 20°$	$t = -20°$	$t = -30°$	$t = -40°$
0.15	48.4	68.3	47.4	53.1	72.9	48.4
0.20	41.1	59.9	42.7	45.9	65.1	47.4
0.30	39.1	52.1	39.1	24.5	41.2	30.2

2) Величина этой разности зависит от условий, еще не вполне выясненных ни теоретически, ни экспериментально, но если эта разность получилась, то она изменяется от температуры, которая зависит в действительности от произведения μV.

3) Величина c содержится в пределах от $c = 0.15$ до $c = 0.30$ и только в редких случаях, как показали опыты № 171, 172, 173, когда разность радиусов уменьшается заметным образом, величина c приближается к 0.4. При изменениях c в пределах от 0.15 до 0.3 сила трения меняется мало. Из уравнения (68) видно, что она меняется пропорционально γ, и сама γ, как это видно из табл. 8, при значениях $c = 0.15$ и $c = 0.3$ близка к отношениям

$$\frac{\gamma_{c=0.15}}{\gamma_{c=0}} = 1.05, \qquad \frac{\gamma_{c=0.3}}{\gamma_{c=0}} = 1.21, \tag{75}$$

откуда вытекает, что, вычисляя силу трения по предложенной мною формуле, соответствующей $c = 0$, ошибки в большинстве случаев будут содержаться в пределах от 5 до 21 %.

Для практических приложений такие отклонения не имеют значения, и поэтому ими можно пренебречь. Отсюда

следует, что при сравнении сил трения, которые развиваются при различных обстоятельствах, можно пользоваться формулами, которые я дал в 1883 г.

Эти формулы заслуживают предпочтения по нескольким причинам: прежде всего они несравненно проще и более легко приложимы; затем они получаются совершенно элементарным приемом, доступным всякому технику; наконец, и это главное, при их применении пользуются крайне простым и легко приложимым графическим приемом, который представляет сводку всех явлений, сопровождающих трение хорошо смазанных частей машин.

Точность этого приема вполне достаточна для практических приложений и в то же время он дает крайне простой метод определения относительных качеств различных смазочных жидкостей. Изучая опыты Бошан—Тауера, Осборн Рейнольдс пришел к другим определениям величины c. Из табл. 4[1], составленной Осборном Рейнольдсом, видно, что c содержится между $c = 0.042$ и $c = 0.67$ при очень малых изменениях температур смазочного слоя, причем скорость v изменялась от $v = 0.169$ до $v = 0.762$, нагрузка же менялась от 6.61 атм. до 27.7 атм. Из-за недостаточности необходимых данных относительно вычислений, которые привели к этим результатам, произвести полное критическое исследование невозможно. Однако можно указать на несомненный аргумент, показывающий, что эти результаты требуют значительных поправок.

§ 20. Ошибка в вычислениях Осборна Рейнольдса

Эта ошибка происходит оттого, что при интегрировании Осборн Рейнольдс написал[2]

[1] См. мемуары Осборна Рейнольдса.

[2] «On the theory of lubrication, by professor Osborne Reynolds», p. 197, équ. (60), et p. 198, équ. (62).

$$A_1 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \cos(\theta - \Phi_0) \cos\theta \partial\theta = \frac{A_1}{2} \left\{ \sin^2\theta \sin\Phi_0 + \right.$$

$$\left. + \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) \cos\Phi_0 \right\}_{\theta_0}^{\theta_1},$$

вместо

$$A_1 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \cos(\theta - \Phi_0) \cos\theta \partial\theta = \frac{A_1}{2} \left\{ \sin^2\theta \sin\Phi_0 + \right.$$

$$\left. + \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) \cos\Phi_0 \right\}_{\theta_0}^{\theta_1},$$

что при $\theta_1 = -\theta_0$ дает, вместо правильной формулы

$$A_1 \left\{ \theta_1 + \frac{\sin 2\theta_1}{2} \right\} \cos\Phi_0,$$

ошибочную формулу

$$A_1 \left\{ \theta_1 - \frac{\sin 2\theta_1}{2} \right\} \cos\Phi_0.$$

По этой причине уравнение (67)[1] его мемуара написано в неправильной форме

$$\frac{L}{R} = (k_1 c A_1 - k_2 B_1) \left(\frac{\sin 2\theta_1}{2} - \theta_1 \right) \cos\Phi_0,$$

вместо правильной

$$\frac{L}{R} = (k_1 c A_1 - k_2 B_1) \left[\frac{\sin 2\theta_1}{2} + \theta_1 \right] \cos\Phi_0.$$

Уравнение (72) мемуара Рейнольдса в правильной форме имеет вид

$$\frac{L}{R} = k_1 c A_1 \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta_1 + \theta_1 \right).$$

[1] Page 199.

При значении $\theta_1 = 1.37045$ (78°31'30'') оно принимает неправильный вид

$$\frac{L}{R} = -1.1753\, k_1 c,$$

тогда как в исправленном виде оно будет

$$\frac{L}{R} = -1.56555\, k_1 c.$$

Если в это последнее уравнение, согласно указанию Осборна Рейнольдса, внести

$$L = 4.84 L' \quad \text{и} \quad R = 2,$$

то получим

$$c = 1.356 \frac{L'}{k_1},$$

вместо ошибочного вывода Рейнольдса

$$c = -2.059 \frac{L'}{k_1}.$$

И вместо ошибочного уравнения (153) мемуара Рейнольдса

$$c = 0.03116\,(1 + 0.002 L')^2 \frac{n^2 L'}{N}\, l^{0.0665\, T_m},$$

получается правильное уравнение

$$c = 0.02052\,(1 + 0.002 L')^2 \frac{n^2 L'}{N}\, l^{0.0665\, T_m}.$$

Так как уравнение (153) применяется для решения уравнений (155), (156), (157) и (158), примененных для составления табл. 4 мемуара Рейнольдса, то, очевидно, что эта таблица ошибочная и, следовательно, нельзя получить из нее правильного заключения.

Нельзя оставить без замечания § 39 мемуара Осборна Рейнольдса[15], в котором он, опираясь на опыты Тауера, прихо-

дит к тому трудно объяснимому заключению, что для малых нагрузок и больших скоростей толщина жидкого слоя, или, лучше сказать, разность радиусов подшипника и цапфы (оси), увеличивается с приращением нагрузки.

Обозначая через

a_0 — разность радиусов подшипника и цапфы при отсутствии нагрузки,

a_x — ту же разность при некоторой нагрузке L и допуская, что изменение разностей радиусов может быть выражено линейной функцией от нагрузки, Осборн Рейнольдс пишет для нагрузки L'

$$a_x' = a_0 + mL'$$

и для другой нагрузки

$$a_x'' = a_0 + mL''.$$

Если принять затем, что для идентичных поверхностей трения для равных скоростей и одинаковых температур смазочного слоя силы трения f' и f'' обратно пропорциональны толщинам слоя, то получим

$$\frac{a_0 + mL'}{a_0 + mL''} = \frac{f''}{f'},$$

откуда

$$m = \frac{a_0 (f'' - f')}{L'f' - L'f''}.$$

Если опыт дает $L' > L''$ для $f' < f''$, то очевидно, что величина m положительна и что приращение нагрузки, следовательно, увеличивает величину a_x. Предполагая, что какой-нибудь опыт приводит к такому заключению, нельзя притти к подобному выводу, который не вытекает из простого логического соображения. Этот [16] вывод вызывает тем бо́льшее сомнение, что прямой опыт и вычисление, которое совершенно

совпадает с ним, указывают, что наибольшее гидродинамическое давление происходило в опыте Тауера вдоль средней образующей подшипника и постепенно уменьшалось по мере того, как жидкий слой приближался к краям подшипника. Всякое увеличение этих сил гидродинамического давления стремится уменьшить, а не увеличить радиус кривизны подшипника. Внешняя нагрузка на подшипник, приложенная к нему с помощью железного кольца большого размера, если это последнее изменяется при увеличении нагрузки, то при любой форме кольца и любых силах, к нему приложенных, радиус кривизны подшипника может только уменьшиться, но ни в коем случае не может увеличиться. Значительные изменения разности радиусов подшипника и цапфы могут только возникать при изменениях температуры этих тел. Все сказанное делает еще более неправдоподобным замечание Осборна Рейнольдса об увеличении a при таком же увеличении нагрузки.

Во всяком случае уменьшение трения при приращении небольших нагрузок при больших скоростях никоим образом не может быть принято как общее явление. Обобщение не подтвердилось ни моими очень широкими опытами, ни большим количеством других, предшествовавших моим, наконец, ни опытами Франческо Мази, проведенными в Болонье для проверки моей формулы и при предположении, что сила трения обратно пропорциональна корню квадратному из нагрузки. По поводу этой гипотезы, выраженной алгебраическим уравнением

$$f\sqrt{p} = \text{const},$$

в котором f есть коэффициент трения и p — нагрузка, Франческо Мази пишет: «Исследуя теперь табл. 1, 2 и 3, видим, что при одинаковых скорости и температуре отмеченные значения $f\sqrt{p}$ для любого масла при всех четырех давлениях действительно меняются; в общем, однако, вариации не очень

значительны; следовательно, в настоящем случае закон давления можно считать с известным приближением подтвержденным».

§ 21. *Сравнение с опытами Франческо Мази*

Франческо Мази нашел, что для очень малых скоростей на поверхности цапфы имеется заметное отклонение величины коэффициента трения от прямой пропорциональности скорости движения цапфы относительно подшипника при постоянной нагрузке и постоянной видимой температуре, но эти отклонения не могут быть объяснены без детального изучения его опытов.

Изучение результатов, полученных в моих опытах, показало, что изменения скорости V и внутреннего трения μ изменяют величину сжатия c и ее функцию γ (табл. 8) и что поэтому нельзя рассматривать силу трения как строго пропорциональную произведению μV. Наибольшие и наименьшие значения произведения μV указаны в таблицах (от 9 до 17); средние значения находятся в табл. 16 и 19.

Для опытов

$$№\ 114-117, \quad \mu' V' = 8.305,$$
$$№\ 163-166, \quad \mu'' V'' = 0.784,$$

откуда

$$\frac{\mu' V'}{\mu'' V''} = 10.6. \tag{76}$$

Несмотря на столь значительные величины отношения, указанного в уравнении (76), оказалось, что отклонения F от прямой пропорциональности с произведением μV заключены в пределах от 5 до 20%.

Сравнивая уравнение (75) с уравнением (68), можно сказать, что для всех моих опытов третьей серии силы трения удовлетворяют неравенству

$$\frac{F' a'}{R \mu' V'} > 1.05\,\gamma_0$$

Величины про

Давление на 1 см²	Из табл. 1. Минеральное масло для газового мотора		Из табл. 2. Смесь R. A.		
	$t=30°$ $\mu=0.001235$	$t=33°$ $\mu=0.001028$	$t=30°$ $\mu=0.001289$	$t=33°$ $\mu=0.00113$	$t=37°$ $\mu=0.000951$
1	0.74	0.58	0.62	0.45	0.55
2	0.99	0.72	0.90	0.86	0.48
3	1.11	1.23	0.84	0.92	0.95
4	1.48	1.36	0.64	0.72	0.68

и

$$\frac{F''a''}{R\mu''V''} < 1.21\,\gamma_0,$$

откуда

$$\frac{F''a''}{F'a'} \cdot \frac{\mu'V'}{\mu''V''} < 1.14.$$

В случаях, где в продолжение всего опыта температура не менялась, величины a и μ также оставались неизменными. При условии, что $a' = a''$ и $\mu' = \mu''$, вышеприведенные неравенства принимают форму

$$\frac{V'}{V''} < 10.6, \qquad \frac{F''}{F'}\,\frac{V'}{V''} < 1.14,$$

и эти последние неравенства достаточно близки к отношениям, полученным из опытов Франческо Мази, в которых произведение μV не опускается ниже известного предела.

Пределы, ниже которых ни в коем случае не должно опускаться произведение μV в опытах Франческо Мази, при данном условии

$$\frac{F''}{F'}\,\frac{V'}{V''} < 1.2,$$

внесены в таблицу 27.

Таблица 27

изведения μV

Из табл. 3. Темное минеральное масло				Ср. значение μV
$t=30°$ $\mu=0.002741$	$t=33°$ $\mu=0.002312$	$t=37°$ $\mu=0.001790$	$t=40°$ $\mu=0.001490$	
1.37	0.92	0.90	0.75	0.65
2.00	1.16	1.72	1.19	0.88
3.47	1.39	1.10	0.89	1.11
1.64	1.97	1.84	1.19	1.36

Для других меньших величин μV опыты Франческо Мази показывают, что

$$\frac{F''}{F'}\frac{V'}{V''}>1.2.$$

Наибольшие значения этих дробей указаны в таблицах 28, 29, 30, которые также заключают соответствующие значения произведения μV.

Таблица 28

(Таблица I. Франческо Мази)

Давление на см² С л.	Минеральное масло для газового мотора					
	$t=30°$, $\mu=0.001235$			$t=33°$, $\mu=0.001028$		
	$\frac{V'}{V''}$	$\mu V''$	$\frac{F''}{F'}\frac{V'}{V''}$	$\frac{V'}{V''}$	$\mu V''$	$\frac{F''}{F'}\frac{V'}{V''}$
1	6.87	0.282	1.64	11.9	0.139	2.44
2	7.04	0.274	2.84	6.96	0.228	2.87
3	5.74	0.324	2.48	7.72	0.230	2.48
4	6.47	0.318	3.03	4.12	0.462	2.05

Таблица 29

Давление на см²	Смесь R. A.								
	$t=30°$, $\mu=0.001280$			$t=33°$, $\mu=0.00113$			$t=37°$, $\mu=0.000951$		
	$\frac{V'}{V''}$	$\mu V''$	$\frac{F''}{F'}\frac{V'}{V''}$	$\frac{V'}{V''}$	$\mu V''$	$\frac{F''}{F'}\frac{V'}{V''}$	$\frac{V'}{V''}$	$\mu V''$	$\frac{F''}{F'}\frac{V'}{V''}$
1	13.6	0.160	2.23	8.50	0.210	1.51	13.3	0.134	2.51
2	7.21	0.267	2.09	9.71	0.183	2.86	9.57	0.149	2.39
3	9.35	0.207	2.96	11.1	0.153	3.30	9.00	0.172	2.83
4	12.5	0.165	2.62	8.62	0.218	2.71	9.16	0.178	2.63

Таблица 30

Давление на см²	Темное минеральное масло											
	$t=30°$, $\mu=0.002741$			$t=33°$, $\mu=0.002312$			$t=37°$, $\mu=0.001790$			$t=40°$, $\mu=0.001490$		
	$\frac{V'}{V''}$	$\mu V''$	$\frac{F''}{F'}\frac{V'}{V''}$	$\frac{V'}{V''}$	$\mu V''$	$\frac{F''}{F'}\frac{V'}{V''}$	$\frac{V'}{V''}$	$\mu V''$	$\frac{F''}{F'}\frac{V'}{V''}$	$\frac{V'}{V''}$	$\mu V''$	$\frac{F''}{F'}\frac{V'}{V''}$
1	6.15	0.699	1.50	8.00	0.522	1.47	14.5	0.220	1.88	12.1	0.238	2.19
2	10.6	0.474	2.28	9.84	0.395	2.27	11.1	0.274	2.07	14.5	0.198	3.69
3	9.2	0.576	2.73	7.64	0.5 0	2.17	6.60	0.418	2.14	6.94	0.402	2.47
4	12.4	0.405	2.54	18.9	0.229	4.14	13.8	0.249	3.06	8.14	0.334	2.35

Эти таблицы ясно показывают весьма большие отклонения от единицы величин отношения $\frac{F''}{F'}\frac{V'}{V''}$ при значительных уменьшениях конечной скорости по сравнению с начальной скоростью в течение опыта.

Опираясь на эти таблицы, нельзя установить какой-нибудь ясной зависимости величины $\frac{F''}{F'}\frac{V'}{V''}$ ни отношения $\frac{V'}{V''}$,

ни от произведения $\mu V''$. Трудность определить величину $\frac{F''}{F'}\frac{V'}{V''}$ происходит не только оттого, что она есть функция нескольких независимых переменных, но особенно оттого, что еще труднее определить эти самые переменные.

Сравнение табл. 28 и 30 с табл. 8 и уравнением (68) не возбуждает сомнения относительно величины $\frac{F''}{F'}\frac{V'}{V''}$ в случае, когда эта дробь не превышает 1.75, а только когда величина $\frac{F''}{F'}\frac{V'}{V''}$ будет больше, чем 1.75.

Из уравнения (67) видно, что чем меньше произведение μV при прочих равных условиях, тем больше должно быть β, которое растет одновременно с сжатием c.

Если произведение μV сделается чрезвычайно малым, то c должно сделаться больше, чем 0.6, и тогда изложенная выше теория перестает быть применимой.

Решение этого вопроса уже не может быть получено путем приложения теории к опытам Франческо Мази.



ПРИЛОЖЕНИЯ



Н. Е. ЖУКОВСКИЙ и С. А. ЧАПЛЫГИН

О ТРЕНИИ СМАЗОЧНОГО СЛОЯ МЕЖДУ ШИПОМ И ПОДШИПНИКОМ[1]

1. Движение вязкой жидкости, заключенной в смазочном слое между шипом и подшипником, было сначала исследовано Н. П. Петровым, который положил основание гидро-

---

[1] Впервые опубликовано: «Известия Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии», 1906, т. CXII, в. 1; Труды Отделения физических наук, т. XIII, в. 1, стр. 24—33 (совм. с С. А. Чаплыгиным).

После того как Н. П. Петров опубликовал в 1883 г. свой основной мемуар по гидродинамической теории смазки, внимание Н. Е. Жуковского было направлено на точное решение поставленной Петровым гидродинамической задачи о движении вязкой жидкости в смазочном слое между шипом и подшипником. В ряде попыток, начиная с 1884 г., Жуковский пробовал решить задачу Петрова, но встречал громадные математические трудности, связанные с интегрированием бигармонического уравнения от двух переменных даже в простейшем случае плоского движения. Только в 1904 г. Н. Е. Жуковскому совместно с С. А. Чаплыгиным удалось решить эту задачу. Подтвердились все выводы, сделанные Н. П. Петровым в его третьем мемуаре (см. стр. 361), вследствие чего труднейшие ряды, примененные Петровым, сделались ненужными. Однако с исторической точки зрения эти математические выкладки рисуют нам Петрова выдающимся математиком-аналитиком, достойным учеником Остроградского. Замечательно, что поставленная в России русским ученым Н. П. Петровым задача о гидродинамической теории смазки у нас же, в России, нашла свое полное и точное решение (*Ред.*).

динамической теории трения шипа. Н. П. Петров принимал смазочный слой ограниченным двумя концентрическими цилиндрами.

Влияние на рассматриваемое явление эксцентричности шипа и подшипника было с помощью приближенного анализа обстоятельно исследовано Осборном Рейнольдсом.[1] В этом году довольно сложный анализ Рейнольдса упрощен Зоммерфельдом,[2] который установил теоретическую зависимость между моментом сил трения, нагрузкою и скоростью шипа и показал, что пропорциональность момента сил трения его скорости или его нагрузке суть два предельных случая общего закона трения в подшипнике, причем первый предельный случай получается при больших, а второй при малых скоростях шипа (сравнительно с нагрузкою). Зоммерфельд упоминает в начале своей статьи, что точное решение задачи о движении вязкой жидкости в двух измерениях между двумя эксцентрическими окружностями, равно как и решение аналитической задачи о равновесии упругой пластины, ограниченной двумя эксцентрическими окружностями, до сих пор еще не найдено.

В предлагаемой статье мы даем это точное решение задачи о движении смазочного слоя и получаем из него при предположении, что слой весьма тонок, формулы Зоммерфельда.

2. Мы будем пользоваться биполярными координатами Неймана, причем некоторые формулы, относящиеся к ним, здесь приведем.

Связь между прямоугольными декартовыми координатами x, y и координатами Неймана ξ, η устанавливается следую-

[1] Osborne Reynolds. Phil. Trans. Roy. Soc. of London, 1886.

[2] Sommerfeld. Zs. f. Math. u. Phys., 1904.

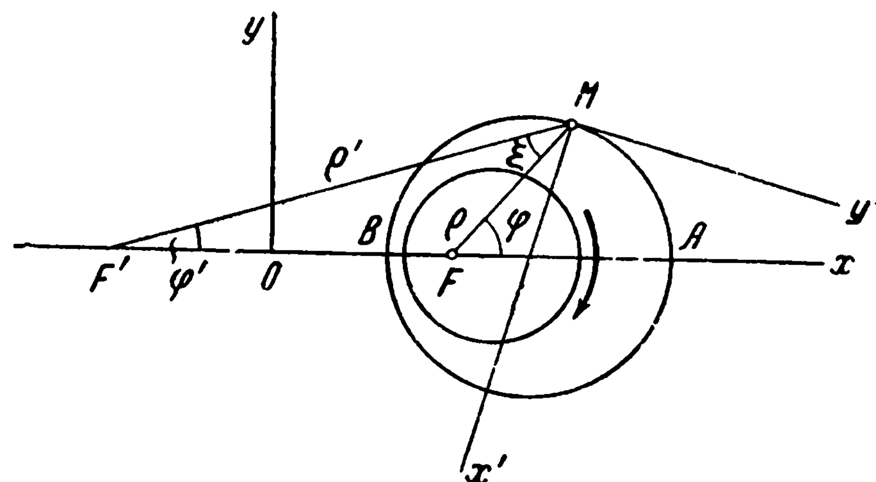
щими соотношениями между мнимыми переменными $z = x + yi$ и $\zeta = \xi + \eta i$:

$$\ln \frac{z-a}{z+a} = i\zeta, \quad z = ai \operatorname{ctg}\left(\frac{\zeta}{2}\right). \tag{1}$$

Первая из формул показывает, что

$$\xi = \varphi - \varphi', \qquad \eta = \ln \frac{\rho'}{\rho},$$

где ρ и ρ' — радиусы-векторы, проведенные к рассматриваемой точке от полюсов F и F', отстоящих (фиг. 1) от начала координат O на расстоянии a, а φ и φ' суть углы между этими радиусами и осью абсцисс Ox.



Фиг. 1

Вторая из формул (1) приводится к виду

$$x + yi = ai \frac{\sin(\xi + \eta i)}{1 - \cos(\xi + \eta i)}$$

и дает по сравнении действительных и мнимых частей

$$x = a \frac{\operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}, \qquad y = a \frac{\sin \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi}. \tag{2}$$

Линии $\xi = \text{const}$ суть окружности, вмещающие хорду FF', а линии $\eta = \text{const}$ суть ортогональные окружности, уравнения которых получаются через исключение ξ из формул (2).

Это исключение удобно сделать, составляя сначала выражение

$$x^2 + y^2 = a^2 \frac{\operatorname{ch} \eta + \cos \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} \tag{3}$$

и потом подставляя сюда

$$\cos\xi = \frac{x \operatorname{ch}\eta - a \operatorname{sh}\eta}{x}.$$

Мы получаем уравнение

$$x^2 + y^2 - 2ax \operatorname{cth}\eta + a^2 = 0,$$

которое показывает, что радиус r упомянутых кругов выражается формулою

$$r = \pm\frac{a}{\operatorname{sh}\eta}, \tag{4}$$

а их центры лежат на оси Ox на расстояниях

$$l = a \operatorname{cth}\eta$$

от начала координат O.

Величина H первого дифференциального параметра рассматриваемой изотермической системы координат найдется по формуле

$$\frac{1}{H^2} = \left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2 \tag{5}$$

и будет на основании уравнения (2) такой:

$$H = \frac{1}{a}(\operatorname{ch}\eta - \cos\xi). \tag{6}$$

Вся рассматриваемая система криволинейных координат может быть охарактеризована величинами r_1 и r_0 радиусов двух ее кругов и разностью $\sigma = \eta_1 - \eta_0$ соответствующих им параметров. Определяем η_1 и η_0 по σ. Пусть $r_0 - r_1 = \delta$, $\frac{\delta}{r_1} = k$. На основании уравнения (4)

$$\delta = \frac{r_1}{\operatorname{sh}\eta_0}(\operatorname{sh}\eta_1 - \operatorname{sh}\eta_0),$$

откуда

$$\operatorname{sh}\eta_1 = (1 + k)\operatorname{sh}\eta_0. \tag{7}$$

Далее,

$$\operatorname{sh}(\eta_0 + \sigma) = \operatorname{sh}\eta_1 = (1 + k)\operatorname{sh}\eta_0,$$
$$\operatorname{sh}(\eta_1 - \sigma) = \operatorname{sh}\eta_0 = \frac{\operatorname{sh}\eta_1}{1 + k},$$

и потому

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cth}\eta_0 &= \frac{1 + k - \operatorname{ch}\sigma}{\operatorname{sh}\sigma}, \\ \operatorname{cth}\eta_1 &= \frac{(1 + k)\operatorname{ch}\sigma - 1}{(1 + k)\operatorname{sh}\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Так как наименьшая величина $\operatorname{cth}\eta_0$ получается при $\eta_0 = \infty$ и есть единица, то σ может изменяться от значения 0 до значения $\ln(1 + k)$.

На основании уравнения (5) эксцентричное расстояние e между центрами рассматриваемых кругов будет

$$e = \frac{r_1 \operatorname{sh}\sigma}{\operatorname{sh}\eta_0}, \tag{9}$$

так что, называя вместе с Зоммерфельдом через α отношение e/δ, найдем

$$\alpha = \frac{\operatorname{sh}\sigma}{\operatorname{sh}\eta_1 - \operatorname{sh}\eta_0}. \tag{9'}$$

К сказанному следует еще прибавить указание на некоторые определенные интегралы, которое будет весьма полезно в дальнейшем изложении. Легко показать, что

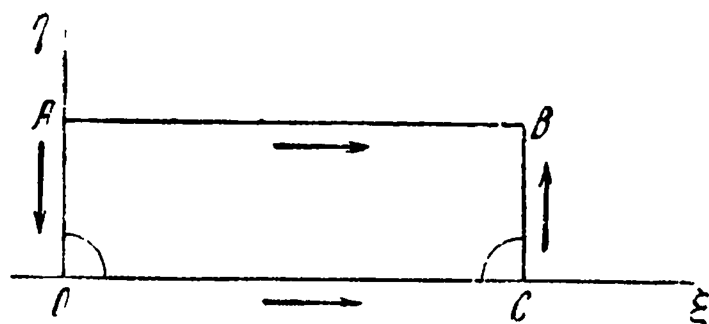
$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} (x \cos m\xi \operatorname{ch} m\eta + y \sin m\xi \operatorname{sh} m\eta)\, d\xi = 2\pi a, \\ &\int_0^{2\pi} (x \cos m\xi \operatorname{sh} m\eta + y \sin m\xi \operatorname{ch} m\eta)\, d\xi = 2\pi a, \\ &\int_0^{2\pi} x \cos m\xi\, d\xi = 2\pi a e^{-m\eta}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где m — какое-нибудь целое и положительное число, которое для первой и третьей формул может быть и нулем.

Третье из уравнений (10) получается через сложение первых двух, предварительно умноженных на $\operatorname{ch} m\eta$ и $-\operatorname{sh} m\eta$. Первое уравнение может быть выведено из рассмотрения интеграла

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\zeta}{2}\cos m\zeta\, d\xi,$$

в котором при интегрировании η считаем постоянным. Этот интеграл на плоскости мнимого переменного $\xi + \eta i$ берется (фиг. 2) по отрезку прямой $AB = 2\pi$, параллельной оси $O\xi$, и может быть заменен интегралом, взятым по контуру $AOCB$ с обходом точек бесконечности находящихся в O и C; при этом обходе мы пройдем по четвертям весьма малых кругов, имеющих центры в O и C. Так как в этих центрах имеем для точки O



Фиг. 2

$$\lim\left(\zeta \operatorname{ctg}\frac{\zeta}{2}\cos m\zeta\right) = 2,$$

и для точки C

$$\lim\left[(\zeta - 2\pi)\operatorname{ctg}\frac{\zeta}{2}\cos m\zeta\right] = 2,$$

то при упомянутых обходах интеграл получает приращение $-\frac{\pi}{2}\cdot i\cdot 2$, и все приращение его при обходах будет $-2\pi i$. Что касается интеграции по отрезкам AO и CB, то здесь результаты интеграции сократятся, так как от замены ζ на $\zeta + 2\pi$ подинтегральная функция не изменяется. Точно так же результат интегрирования по отрезку OC будет нуль, так как в точках $(\xi, 0)$ и $(2\pi - \xi, 0)$ подинтегральная функция

имеет значения, равные по величине, но противоположные по знаку. На основании всего сказанного

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\zeta}{2} \cos m\zeta \, d\xi = -2\pi i,$$

что на основании уравнения (1) можно представить в виде

$$\int_0^{2\pi} (x + yi)(\cos m\xi \operatorname{ch} m\eta - i \sin m\xi \operatorname{sh} m\eta)\, d\xi = 2\pi a.$$

Сравнение действительных частей дает нам первое из уравнений (10). Чтобы получить второе уравнение (10), рассмотрим интеграл

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\zeta}{2} \sin m\zeta \, d\xi.$$

Заменив интеграцию по прямой AB (фиг. 2) интеграцией по контуру $AOCB$, мы не должны будем обходить точки O и C, так как они не являются точками бесконечности. Результаты интеграции по AO и по CB взаимно уничтожаются, а результат интеграции по OC может быть представлен в виде

$$2 \int_0^{\pi} \operatorname{ctg} \left(\frac{\xi}{2}\right) \sin m\xi \, d\xi$$

и так как

$$\int_0^{\pi} \operatorname{ctg} \left(\frac{\xi}{2}\right) \sin m\xi \, d\xi = \pi,$$

то

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \left(\frac{\zeta}{2}\right) \sin m\zeta \, d\xi = 2\pi.$$

Подстановка сюда уравнения (1) и сравнение мнимых частей дает нам второе уравнение (10).

3. Уравнения движения вязкой жидкости в двух измерениях при отбрасывании сил инерции, которые малы сравнительно с силами трения, могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial 2\omega}{\partial y}, \\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{\partial 2\omega}{\partial x}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где ω представляет угловую скорость вихря, определенную по компонентам u, v скорости жидкости формулою

$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{12}$$

и считаемую положительной при вращении вихря по стрелке часов, p есть гидродинамическое давление, а μ — коэффициент вязкости жидкости.

Уравнение (11) показывает, что комплексная мнимая величина $\frac{p}{\mu} + 2\omega i$ есть аналитическая функция от z, а следовательно, и функция от ξ. Введем обозначения операций:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2};$$

на основании сказанного имеем

$$\Delta(2\omega) = 0, \qquad \nabla(2\omega) = 0. \tag{13}$$

Назовем через W функцию тока, т. е. количество жидкости, протекающей в единицу времени между двумя линиями тока, и положим

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial W}{\partial x}. \tag{14}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (12), найдем по уравнению (6)

$$2\omega = \Delta(W) = \frac{(\operatorname{ch}\eta - \cos\xi)^2}{a^2} \nabla W, \tag{15}$$

вследствие чего по уравнению (13)

$$\Delta\Delta W = \nabla\{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi)^2 \nabla W\} = 0. \tag{16}$$

Определив функцию тока W, удовлетворяющую уравнению (16) и граничным данным задачи, мы будем знать по уравнению (15) величину 2ω, а следовательно, и величину $\frac{p}{\mu}$, так как

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \xi} &= \frac{\partial 2\omega}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial \eta} &= -\frac{\partial 2\omega}{\partial \xi}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Функцию W мы представим в виде суммы членов, удовлетворяющих порознь уравнению (16). Такими членами, очевидно, являются:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{a} = \frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}, \quad \eta, \quad \frac{x^2+y^2}{2a^2} + \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}, \\ &\frac{x^2+y^2}{2a^2} - \frac{1}{2} = \frac{\cos\xi}{\operatorname{ch}\eta\cos\xi}, \quad \frac{x\eta}{a} = \frac{\eta\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}, \\ &\frac{2x\cos\xi\operatorname{ch}\eta}{a} = \frac{\operatorname{sh}2\eta\cos\xi}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}, \\ &\frac{x^2+y^2}{2a^2} - \frac{1}{2} + \frac{2x\cos\xi\operatorname{sh}\eta}{a} = \frac{\operatorname{ch}2\eta\cos\xi}{\operatorname{ch}\eta - \cos\xi}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

При этом для оправдания сказанного относительно трех последних членов надо обратить внимание на формулы

$$\left.\begin{aligned}\Delta f\cdot f_1&=f\Delta f_1+f_1\Delta f+2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial y}\right),\\ \nabla f\cdot f_1&=f\nabla f_1+f_1\nabla f+2\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial f_1}{\partial \xi}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial f_1}{\partial \eta}\right).\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

Сумму из членов (18) мы возьмем в следующем виде:

$$W=D(\eta-\eta_0)+\frac{A\,\mathrm{sh}(\eta-\eta_0)+B(\eta-\eta_0)\,\mathrm{sh}\,\eta+C\cos\xi\,[\mathrm{sh}\,(\tau-2\eta)]}{\mathrm{ch}\,\eta-\cos\xi}.\qquad(20)$$

Здесь принимается, что $\eta=\eta_0$ есть окружность подшипника радиуса r_0, $\eta=\eta_1$ есть окружность шипа радиуса r_1, $\sigma=\eta_1-\eta_0$, $\tau=\eta_1+\eta_0$, а A, B, C, D суть четыре коэффициента, которые, как сейчас увидим, могут быть определены так, чтобы удовлетворить всем граничным данным нашей задачи.

Представим уравнение (20) в виде

$$W=\frac{M}{\mathrm{ch}\,\eta-\cos\xi}+N,\qquad(20')$$

при

$$\left.\begin{aligned}M&=A\,\mathrm{sh}\,(\eta-\eta_0)+B(\eta-\eta_0)\,\mathrm{sh}\,\eta+\\&+C\,\mathrm{ch}\,\eta\,[\mathrm{sh}\,(\tau-2\eta)-\mathrm{sh}\,\sigma],\\ N&=D(\eta-\eta_0)-C\,[\mathrm{sh}\,(\tau-2\eta)-\mathrm{sh}\,\sigma].\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

Граничные условия будут такие: на поверхности подшипника и шипа W постоянно; на поверхности подшипника тангенциальная скорость

$$H\frac{\partial W}{\partial \eta}=0,\qquad(22)$$

а на поверхности шипа

$$H\frac{\partial W}{\partial \eta}=-U,\qquad(23)$$

где U — скорость точек окружности шипа, считаемая положительной при его вращении (на фиг. 1) по часовой стрелке.

Так как при $\eta=\eta_0$ (на поверхности подшипника) имеем $M=N=0$, то W на этой поверхности постоянно. Мы удовлетворим всем остальным граничным условиям положениями

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial M}{\partial\eta}\right)_{\eta=\eta_0}=0, && (N)_{\eta=\eta_1}=-Q,\\ &\left(\frac{\partial N}{\partial\eta}\right)_{\eta=\eta_0}=0, && \left(\frac{\partial M}{\partial\eta}\right)_{\eta=\eta_1}=-Ua,\\ &(M)_{\eta=\eta_0}=0, && \left(\frac{\partial N}{\partial\eta}\right)_{\eta=\eta_1}=0, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

где Q есть секундный объем жидкости, протекающей между шипом и подшипником.

Уравнения (21) показывают нам, что второе и шестое из написанных условий между собою тождественны и вместе с четвертым условием служат для определения D и Q по C:

$$D+2C\operatorname{ch}\sigma=0, \qquad D\sigma+2C\operatorname{sh}\sigma+Q=0. \tag{25}$$

Для определения A, B и C у нас останутся еще первое, третье и пятое условия (24), которые напишутся так:

$$\left.\begin{aligned} A+B\operatorname{sh}\eta_0-2C\operatorname{ch}\eta_0\operatorname{ch}\sigma=0,\\ A\operatorname{sh}\sigma+B\sigma\operatorname{sh}\eta_1-2C\operatorname{ch}\eta_1\operatorname{sh}\sigma=0,\\ A\operatorname{ch}\sigma+B(\operatorname{sh}\eta_1+\sigma\operatorname{ch}\eta_1)-2C\operatorname{ch}(\eta_1+\sigma)=-aU. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Уравнения (25) и (26) решают всю рассматриваемую задачу о движении смазочного слоя, кругом охватывающего шип, причем все коэффициенты могут быть определены по σ.

Исключаем из первого и второго уравнений (26) коэффициент A

$$B(\operatorname{sh}\sigma\operatorname{sh}\eta_0-\sigma\operatorname{ch}\eta_1)-2C[\operatorname{ch}\eta_0\operatorname{ch}\sigma-\operatorname{ch}(\sigma+\eta_0)]\operatorname{sh}\sigma=0,$$

или

$$B[\operatorname{sh}\sigma\operatorname{sh}\eta_0-\sigma\operatorname{sh}\eta_1]+2C\operatorname{sh}^2\sigma\operatorname{sh}\eta_0=0.$$

Эта формула по разделении на $\operatorname{sh}\eta_0$ и по упрощении на основании соотношения (7) приводится к следующей:

$$2C=\frac{B}{\operatorname{sh}^2\sigma}[\sigma(1+k)-\operatorname{sh}\sigma]. \tag{27}$$

Исключаем A из второго и третьего уравнений (26)

$$B(\sigma\operatorname{sh}\eta_1\operatorname{ch}\sigma-\operatorname{sh}\eta_1\operatorname{sh}\sigma-\sigma\operatorname{sh}\sigma\operatorname{ch}\eta_1)-$$
$$-2C[\operatorname{ch}\eta_1\operatorname{sh}\sigma\operatorname{ch}\sigma-\operatorname{sh}\sigma\operatorname{ch}(\eta_1+\sigma)]=Ua\operatorname{sh}\sigma.$$

Делаем здесь преобразование

$$B(\sigma\operatorname{sh}\eta_0-\operatorname{sh}\sigma\operatorname{sh}\eta_1)+2C\operatorname{sh}^2\sigma\operatorname{sh}\eta_1=Ua\operatorname{sh}\sigma.$$

По разделении этой формулы на $\operatorname{sh}\eta_1$ на основании уравнений (7) и (4), найдем

$$B\left[\frac{\sigma}{1+k}-\operatorname{sh}\sigma\right]+2C\operatorname{sh}^2\sigma=Ur_1\operatorname{sh}\sigma.$$

Если подставим сюда величину C из (27), то получим окончательно

$$B=\frac{Ur_1(1+k)\operatorname{sh}\sigma}{\sigma-2(1+k)\operatorname{sh}\sigma+(1+k)^2\sigma}, \tag{28}$$

а следовательно, по уравнению (27)

$$2C=\frac{Ur_1(1+k)[\sigma(1+k)-\operatorname{sh}\sigma]}{\operatorname{sh}\sigma[\sigma-2(1+k)\operatorname{sh}\sigma+(1+k)^2\sigma]}. \tag{29}$$

Теперь мы можем выразить через σ количество Q жидкости, протекающей между шипом и подшипником. Мы имеем по уравнению (25)

$$Q = 2C(\sigma \operatorname{ch}\sigma - \operatorname{sh}\sigma) = \frac{Ur_1(\sigma \operatorname{ch}\sigma - \operatorname{sh}\sigma)[\sigma(1+k) - \operatorname{sh}\sigma](1+k)}{[\sigma - 2(1+k)\operatorname{sh}\sigma + (1+k)^2\sigma]\operatorname{sh}\sigma}. \tag{30}$$

В предельном случае, когда шип и подшипник делаются концентрическими, надо в уравнении (8) принять $\eta_0 = \infty$, так что

$$\operatorname{sh}\sigma + \operatorname{ch}\sigma = e^\sigma = 1 + k, \qquad \sigma = \ln(1+k),$$

$$Q = \frac{Ur_1(\sigma e^\sigma - \operatorname{sh}\sigma)}{2\operatorname{sh}\sigma}.$$

В случае очень тонкого слоя k близко к нулю и σ тоже очень близко к нулю. Так как при σ, приближающемся к нулю, можно принять

$$\frac{\sigma \operatorname{ch}\sigma - \operatorname{sh}\sigma}{\sigma(1+e^{2\sigma}) - 2e^\sigma \operatorname{sh}\sigma} = \frac{1}{2}, \qquad \sigma e^\sigma - \operatorname{sh}\sigma = \sigma^2,$$

то определяемое значение Q будет

$$Q = \frac{Ur_1\sigma}{2} = \frac{Ur_1k}{2} = \frac{U\delta}{2}. \tag{31}$$

Это совпадает со случаем, рассмотренным Н. П. Петровым. В общем же случае количество протекающей жидкости определяется по параметру σ, который, как будет показано ниже, находится по радиусам шипа и подшипника и по нагрузке P на шип.

4. Когда функция W найдена, то уравнением (15) сейчас же определяется 2ω. Совершаем операцию ∇ над членами, входящими в состав правой части уравнения (20); пользуясь при этом уравнениями (18) и (19), получаем

$$\left.\begin{aligned} \nabla\left(\frac{\operatorname{sh}(\eta-\eta_0)}{(\operatorname{ch}\eta - \cos\xi)}\right) &= \frac{-2\operatorname{sh}\eta_0}{(\operatorname{ch}\eta - \cos\xi)^2}, \\ \nabla\left(\frac{(\eta-\eta_0)\operatorname{sh}\eta}{(\operatorname{ch}\eta - \cos\xi)}\right) &= \frac{2 - 2\cos\xi \operatorname{ch}\eta}{(\operatorname{ch}\eta - \cos\xi)^2}, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla\left(\frac{\cos\xi\,\mathrm{sh}\,2\eta}{\mathrm{ch}\,\eta-\cos\xi}\right)=\frac{-2\,\mathrm{sh}\,2\eta\cos 2\xi+4\,\mathrm{sh}\,\eta\cos\xi}{(\mathrm{ch}\,\eta-\cos\xi)^2},\\
&\nabla\left(\frac{\cos\xi\,\mathrm{ch}\,2\eta}{\mathrm{ch}\,\eta-\cos\xi}\right)=\frac{-2\,\mathrm{ch}\,2\eta\cos 2\xi+4\,\mathrm{ch}\,\eta\cos\xi}{(\mathrm{ch}\,\eta-\cos\xi)^2},\\
&\nabla\left(\frac{\cos\xi\,[\mathrm{sh}\,(\tau-2\eta)-\mathrm{sh}\,\sigma]}{\mathrm{ch}\,\eta-\cos\xi}\right)=\\
&=\frac{-2\cos 2\xi\,\mathrm{sh}\,(\tau-2\eta)+4\cos\xi\,\mathrm{sh}\,(\tau-\eta)-2\,\mathrm{sh}\,\sigma}{(\mathrm{ch}\,\eta-\cos\xi)^2}.
\end{aligned}\right\}\quad(32)$$

Пользуясь этими формулами, находим, что

$$2\omega a^2=-2A\,\mathrm{sh}\,\eta_0+2B-2C\,\mathrm{sh}\,\sigma-2B\cos\xi\,\mathrm{ch}\,\eta+$$
$$+4C\cos\xi\,\mathrm{sh}\,(\tau-\eta)-2C\cos 2\xi\,\mathrm{sh}\,(\tau-2\eta). \quad (33)$$

Рядом с 2ω, согласно уравнению (17), сейчас же определяется давление жидкости

$$\frac{p}{\mu}a^2=-2B\sin\xi\,\mathrm{sh}\,\eta-4C\sin\xi\,\mathrm{ch}\,(\tau-\eta)+$$
$$+2C\sin 2\xi\,\mathrm{ch}\,(\tau-2\eta). \quad (34)$$

Мы не прибавляем здесь произвольного постоянного, потому что имеем в виду рассматривать только переменную часть давления.

Так как нами определены только коэффициенты B и C уравнений (28) и (29), то исключим из уравнения (33) коэффициент A с помощью первого уравнения (26)

$$2\omega a^2=2B\,\mathrm{ch}^2\,\eta_0-2C\,(\sin 2\eta_0\,\mathrm{ch}\,\sigma+\mathrm{sh}\,\sigma)-2B\cos\xi\,\mathrm{ch}\,\eta+$$
$$+4C\cos\xi\,\mathrm{sh}\,(\tau-\eta)-2C\cos 2\xi\,\mathrm{sh}\,(\tau-2\eta). \quad (34')$$

Если теперь положим $\eta=\eta_0$, то найдем угловую скорость вихря и давление при поверхности подшипника. Представим их так:

$$2\omega a^2=2B\,\mathrm{ch}\,\eta_0\,(\mathrm{ch}\,\eta_0-\cos\xi)-2C\,[\mathrm{sh}\,\sigma\,(1+\cos 2\xi-$$
$$-2\cos\xi\,\mathrm{ch}\,\eta)+\mathrm{ch}\,\sigma\,(\mathrm{sh}\,2\eta_0-2\cos\xi\,\mathrm{sh}\,\eta_0)], \quad (35)$$

$$\frac{p}{\mu}a^2 = -2\left[B + 2C\frac{(1+k)\operatorname{ch}\sigma - 1}{\operatorname{sh}\sigma}\right]\operatorname{sh}\eta_0\sin\xi + \\ + 2C\sin 2\xi\operatorname{ch}\sigma. \qquad (36)$$

При этом для получения уравнения (36) мы воспользовались соотношениями (7) и (8).

Уравнение (36) показывает, что переменная часть гидродинамического давления зависит от двух членов с множителями $\sin\xi$ и $\sin 2\xi$. Для всех точек подшипника, соответствующих параметрам ξ и $2\pi-\xi$, давления одинаковы, но противоположны по знаку, так что равнодействующая всех этих давлений направлена перпендикулярно к оси Ox (фиг. 1). При очень малых k и σ уравнения (28) и (29) принимают вид

$$B = \frac{Ur_1}{k^2\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\sigma^2}{k^2}\right)}, \qquad 2C = \frac{Ur_1}{k\sigma\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\sigma^2}{k^2}\right)},$$

и уравнение (36) обращается в такое:

$$\frac{p}{\mu}a^2 = \frac{Ur_1}{k^2\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\sigma^2}{k^2}\right)}\left\{-2\left(1 + \frac{k^2}{\sigma^2}\right)\operatorname{sh}\eta_0\sin\xi + \frac{k}{\sigma}\sin 2\xi\right\},$$

а так как при малых k и σ уравнение (8) дает нам

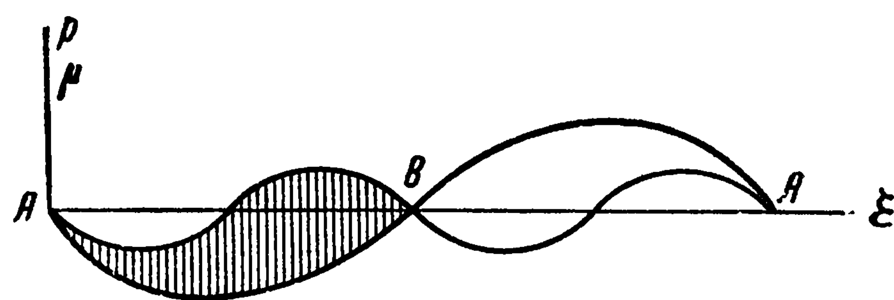
$$\operatorname{cth}\eta_0 = \frac{k}{\sigma},$$

то, согласно уравнению (4),

$$\frac{p}{\mu} = \frac{U}{k^2 r_1\operatorname{sh}^3\eta_0}\left(\frac{3\operatorname{ch}^2\eta_0}{1 + 2\operatorname{ch}^2\eta_0}\right)[-2\operatorname{ch}2\eta_0\sin\xi + \operatorname{ch}\eta_0\sin 2\xi]. \qquad (37)$$

Эта величина p представляется графически отрезками ординат между двумя синусоидами, из которых синусоида с аргументом 2ξ имеет меньшую амплитуду, нежели синусоида с аргументом ξ, так как $\operatorname{ch}2\eta_0 > \operatorname{ch}\eta_0$. Заштрихованная часть

на фиг. 3 представляет отрицательное давление, а незаштрихованная — положительное. Во всей верхней части подшипника (изменение ξ от 0 до π) давление будет отрицательно, а во всей нижней (изменение ξ от π до 2π) положительно. Самое большое изменение давления получается при приближении к точке B.



Фиг. 3

5. Обращаемся к определению силы P и момента L пары, с которыми смазочный слой действует на шип, или, что все равно, с которыми подшипник действует на смазочный слой. На каждый элемент площади смазочного слоя, прилегающего к подшипнику, будет действовать некоторая нормальная и тангенциальная сила. Отнесем эти силы к единице площади и назовем их через n и t, причем эти величины мы будем считать положительными, когда соответствующие им силы направлены в сторону осей Mx' и My', указанных на фиг. 1. Если u' и v' суть проекции скорости точки движущейся вязкой жидкости на указанные оси, то по известным формулам движения вязкой жидкости найдем

$$n = p - 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x'}, \qquad t = -\mu \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right). \tag{38}$$

Легко усмотреть, что в нашей задаче для точки подшипника M имеют место условия

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'}{\partial y'} = 0.$$

Действительно, если выразим функцию тока W в координатах x' и y', то найдем, подобно уравнению (14),

$$u' = \frac{\partial W}{\partial y}, \qquad v' = \frac{-\partial W}{\partial x'}.$$

Так как во всех точках подшипника

$$u'^2 + v'^2 = 0,$$

то во всех этих точках

$$\frac{\partial W}{\partial x'} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial y'} = 0.$$

Возьмем от написанных равенств полные производные по y', предполагая, что x' выражено через y' с помощью уравнения окружности подшипника:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial y'} + \frac{\partial^2 W}{\partial x'^2} \frac{dx'}{dy'} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y' \partial x'} \frac{dx'}{dy'} = 0.$$

Так как для точки M' имеем $\frac{dx'}{dy'} = 0$, то в этой точке

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial y'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = \frac{\partial u'}{\partial y'} = 0.$$

Добавим, что угловая скорость вихря в точке M' будет

$$2\omega = \frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial x'} = -\frac{\partial v'}{\partial x'},$$

и представим уравнение (38) в следующем простом виде:

$$n = p, \qquad t = 2\mu\omega. \qquad (38')$$

Сила P образуется от действия сил n и t на каждый элемент смазочного слоя, прилегающего к подшипнику. Так как, согласно уравнениям (36) и (35), в точках подшипника, соответствующих значениям параметра ξ и $2\pi - \xi$, давление p одинаково по величине, но различно по знаку, а значения 2ω в этих точках одинаковы по величине и по знаку, то проекция равнодействующей на ось Ox (фиг. 1) будет нуль, и вся равнодействующая P будет направлена по оси Oy.

Косинусы углов, которые оси (фиг. 1) Mx' и My' образуют с Oy, будут даны формулами

$$\partial y : \frac{\partial \eta}{H} = H\frac{\partial y}{\partial \eta} = H\frac{\partial x}{\partial \xi}, \qquad dx : \frac{\partial \eta}{H} = H\frac{\partial x}{\partial \eta} = -H\frac{\partial y}{\partial \xi}.$$

Вследствие этого, на основании уравнения (38'),

$$P = \mu\int_0^{2\pi}\left(\frac{p}{\mu}\frac{\partial x}{\partial \xi} - 2\omega\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)d\xi =$$

$$= \mu\Big|_0^{2\pi}\left(\frac{p}{\mu}x - 2\omega y\right) - \mu\int_0^{2\pi}\left[x\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{p}{\mu}\right) - y\frac{\partial}{\partial \xi}(2\omega)\right]d\xi.$$

Вставка между пределами пропадает, и мы получаем

$$P = -\mu\int_0^{2\pi}\left[x\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{p}{\mu}\right) - y\frac{\partial}{\partial \xi}(2\omega)\right]d\xi. \tag{39}$$

При составлении производных по ξ от вторых частей уравнений (33) и (34) раскроем гиперболические функции, содержащие τ, и напишем

$$\left.\begin{aligned} a^2\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{p}{\mu} &= -2B\cos\xi\,\mathrm{sh}\,\eta_0 - 4C\{\mathrm{ch}\,\tau(\cos\xi\,\mathrm{ch}\,\eta_0 - \\ &- \cos 2\xi\,\mathrm{ch}\,2\eta_0) - \mathrm{sh}\,\tau(\cos\xi\,\mathrm{sh}\,\eta_0 - \cos 2\xi\,\mathrm{sh}\,2\eta_0)\}, \\ a^2\frac{\partial(2\omega)}{\partial \xi} &= 2B\sin\xi\,\mathrm{ch}\,\eta_0 + 4C\{\mathrm{ch}\,\tau(\sin\xi\,\mathrm{sh}\,\eta_0 - \\ &- \sin 2\xi\,\mathrm{sh}\,2\eta_0) - \mathrm{sh}\,\tau(\sin\xi\,\mathrm{ch}\,\eta_0 - \sin 2\xi\,\mathrm{ch}\,2\eta_0)\}. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (39) и воспользовавшись уравнением (10), увидим, что все члены при коэффициенте C сокращаются, и у нас получается

$$P = \frac{4\pi\mu B}{a}. \tag{41}$$

Подставляя сюда величину B из уравнения (28)

$$P=\frac{4\pi\mu Ur_1}{a}\frac{(1+k)\operatorname{sh}\sigma}{\sigma-2(1+k)\operatorname{sh}\sigma+(1+k)^2\sigma}, \tag{41'}$$

откуда, заменяя $r_1=\frac{a}{\operatorname{sh}\eta_1}$ и воспользовавшись уравнением (8), найдем окончательно

$$P=\frac{4\pi\mu U\sqrt{(1+k)^2+1-2(1+k)\operatorname{ch}\sigma}}{\sigma[(1+k)^2+1]-2(1+k)\operatorname{sh}\sigma}. \tag{42}$$

Переходим к определению момента L, который будем отыскивать в предположении, что сила P приложена в центре шипа. Приведем всю рассматриваемую систему сил к силе P, приложенной в центре подшипника, и к паре с моментом L'. При переносе силы P в центр шипа получается пара с несколько иным моментом L, причем

$$L=L'-Pe,$$

или, по уравнению (9),

$$L=L'-P\frac{r_1\operatorname{sh}\sigma}{\operatorname{sh}\eta_0}. \tag{43}$$

Что касается момента L', то он будет, согласно уравнению (38'), иметь следующую величину:

$$L'=r_0\int_0^{2\pi}\frac{2\mu\omega\, d\xi}{H},$$

или, по уравнениям (6) и (2),

$$L'=\frac{\mu r_0}{\operatorname{sh}\eta_0}\int_0^{2\pi}2\omega x\, d\xi. \tag{44}$$

Подставляя сюда 2ω из уравнения (35) и пользуясь последним уравнением (10), мы увидим, что коэффициент при $\operatorname{sh}\sigma$ сократится и получится

$$L' = \frac{4\pi\mu r_0}{a}(B \operatorname{ch}\eta_0 - 2C \operatorname{sh}\eta_0 \operatorname{ch}\sigma),$$

или по (4)

$$L' = 4\pi\mu\,[B \operatorname{cth}\eta_0 - 2C \operatorname{ch}\sigma].$$

Подставляем это выражение в уравнение (43), в котором P заменяем по уравнению (41)

$$L = 4\pi\mu\left\{[B \operatorname{cth}\eta_0 - 2C \operatorname{ch}\sigma] - B\frac{\operatorname{sh}\sigma}{\operatorname{sh}\eta_0 \operatorname{sh}\eta_1}\right\};$$

это дает

$$L = 4\pi\mu\,[B \operatorname{cth}\eta_1 - 2C \operatorname{ch}\sigma]. \tag{45}$$

Подставляя сюда значения коэффициентов B и C из уравнений (28) и (29) и пользуясь уравнением (8), получаем

$$L = -4\pi\mu r_1 U\frac{\sigma(1+k)^2 \operatorname{cth}\sigma - 2(1+k)\operatorname{ch}\sigma + 1}{\sigma[(1+k)^2+1] - 2(1+k)\operatorname{sh}\sigma}. \tag{46}$$

Уравнения (42) и (46) решают нашу задачу. При данном P/U из (42) определяем σ и, подставив эту величину в (46), находим момент $(-L)$ пары, поглощаемый трением. Величина σ, как было сказано, изменяется от значения 0 до значения $\sigma_0 = \ln(1+k)$. Пользуясь величиною σ_0, представим P в таком виде:

$$\frac{\sqrt{2}P}{4\pi\mu U}e^{\frac{\sigma_0}{2}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}\sigma_0 - \operatorname{ch}\sigma}}{\sigma \operatorname{ch}\sigma_0 - \operatorname{sh}\sigma}. \tag{47}$$

Посмотрим, как будет изменяться отношение P/U при непрерывном изменении σ от 0 до σ_0. При $\sigma = 0$ знаменатель обращается в нуль и при дальнейшем возрастании σ возрастает до тех пор, пока

$$\frac{d}{d\sigma}(\sigma \operatorname{ch} \sigma_0 - \operatorname{sh} \sigma) = \operatorname{ch} \sigma_0 - \operatorname{ch} \sigma > 0,$$

т. е. до значения $\sigma = \sigma_0$. Числитель дроби (47) идет, убывая от значения $\sigma = 0$ до значения $\sigma = \sigma_0$. Таким образом, при изменении σ от 0 до σ_0 дробь P/U убывает от бесконечности до нуля.

Составим величину коэффициента трения λ

$$\lambda = \frac{(-L)}{Pr_1} = \frac{\sigma(1+k)^2 \operatorname{cth} \sigma + 1 - 2(1+k)\operatorname{ch} \sigma}{\sqrt{(1+k)^2 + 1 - 2(1+k)\operatorname{ch} \sigma}} =$$
$$= \frac{\left(\frac{(1+k)^2 \sigma \operatorname{cth} \sigma + 1}{2(1+k)} - \operatorname{ch} \sigma\right)\sqrt{2(1+k)}}{\sqrt{\operatorname{ch} \sigma_0 - \operatorname{ch} \sigma}}. \qquad (48)$$

Легко показать, что производная от λ по σ при небольших σ_0 имеет отрицательную величину для малых σ, а при σ, приближающемся к σ_0, она положительна и неограниченно возрастает; вследствие этого λ имеет непременно минимум между значениями $\sigma = 0$ и $\sigma = \sigma_0$; около этого минимума λ можно рассматривать как величину постоянную и считать момент силы трения пропорциональным силе нагрузки шипа P, как это следует из закона трения твердых тел. Другой предельный случай получается при σ, близком к σ_0. При этом уравнение (48) преобразуем так:

$$\lambda = \sqrt{2(1+k)}\left[\sqrt{\operatorname{ch} \sigma_0 - \operatorname{ch} \sigma} + \frac{(1+k)(\delta \operatorname{ch} \sigma - \operatorname{sh} \sigma)}{2\sqrt{\operatorname{ch} \sigma_0 - \operatorname{ch} \sigma} \operatorname{sh} \sigma}\right]. \qquad (48')$$

При σ, близком к σ_0, первый член пропадает перед вторым, и мы получаем на основании уравнения (47)

$$\lambda = 2\pi\mu \frac{1+kU}{\operatorname{sh} \sigma_0} \frac{U}{P} = 4\pi\mu \frac{(1+k)^2}{(1+k)^2 - 1} \frac{U}{P}. \qquad (49)$$

При заданном P рассматриваемый предельный случай соответствует значительным скоростям U. Это дает нам гидродинамический закон трения шипа в подшипнике, по которому момент сил, поглощенных трением смазочного слоя, пропорционален окружной скорости U и не зависит от давления P.

6. Переходим к предположению, что k есть малая величина. На основании соотношения

$$\sigma_0 = \ln(1 + k),$$

σ_0 будет порядка малости k, а следовательно, и переменная величина σ, заключенная в пределах 0 и σ_0, будет малая величина порядка малости k. Преобразуем уравнение (47) через отбрасывание малых величин высших порядков перед малыми величинами низших порядков

$$\frac{P}{U} = \frac{12\pi\mu\sqrt{\sigma_0^2 - \sigma^2}}{\sigma(3\sigma_0^2 - \sigma^2)}, \tag{50}$$

$$\frac{(-L)}{r_1 U} = \frac{4\pi\mu(3\sigma_0^2 - 2\sigma^2)}{\sigma(3\sigma_0^2 - \sigma^2)}, \tag{51}$$

$$\lambda = \frac{1}{3}\,\frac{3\sigma_0^2 - 2\sigma^2}{3\sqrt{\sigma_0^2 - \sigma^2}}. \tag{52}$$

Наименьшее значение λ, о котором мы упоминали в предыдущем параграфе, здесь находится очень просто. Оно получается при

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\sigma_0}}$$

и таково:

$$\lambda = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sigma_0 = 0.94\sigma_0.$$

При малом k уравнение (8) дает нам

$$\operatorname{cth}\eta_0=\frac{k}{\sigma}=\frac{\sigma_0}{\sigma}, \qquad \sigma=\sigma_0 \operatorname{th}\eta_0.$$

Подставляя это в уравнения (50) и (51), получаем

$$\frac{P}{U}=\frac{12\pi\mu \operatorname{ch}^2\eta_0}{\sigma_0^2 \operatorname{sh}\eta_0 (2\operatorname{ch}^2\eta_0+1)}, \qquad \frac{(-L)}{Ur_1}=\frac{4\pi\mu(\operatorname{ch}^2\eta_0+2)}{\sigma_0(2\operatorname{ch}^2\eta_0+1)\operatorname{th}\eta_0}.$$

Так как при весьма малом k уравнение (9') дает нам

$$\alpha=\frac{1}{\operatorname{ch}\eta_0}$$

и в то же время

$$\sigma_0=\ln(1+k)=k=\frac{\delta}{r_1},$$

то

$$\left.\begin{aligned} \frac{P}{U}&=12\pi\mu\frac{r_1^2}{\delta^2}\,\frac{\alpha}{(2+\alpha^2)\sqrt{1-\alpha^2}},\\ \frac{(-L)}{r_1U}&=4\pi\mu\frac{r_1}{\delta}\,\frac{1+2\alpha^2}{(2+\alpha^2)\sqrt{1-\alpha^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Это суть приближенные формулы Зоммерфельда.

М. Н. ПЕТРОВ

ТВОРЕЦ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТРЕНИЯ — НИКОЛАЙ ПАВЛОВИЧ ПЕТРОВ[1]

С именем Николая Павловича Петрова связана мировая слава творца одной из важнейших теорий технической науки — теории трения в машинах. Высокое значение многих его трудов в настоящее время признано всеми, эти труды изучаются как классические произведения технической мысли. Научное наследие Н. П. Петрова, состоящее из ряда глубоких исследований, в объеме около 6000 страниц, составляет гордость русской технической науки.

К сожалению, Николай Павлович не оставил своего жизнеописания. То, что пока о нем можно сказать, основывается глав-

[1] Прилагаемый здесь очерк жизни и научной деятельности почетного академика Николая Павловича Петрова принадлежит его сыну — инженеру путей сообщения М. Н. Петрову. В основном сохранена та форма, которая была придана этому очерку автором, внесены лишь небольшие изменения с целью сделать очерк более отвечающим современным техническим требованиям.

Список работ Н. П. Петрова также составлен М. Н. Петровым. В него не вошли 26 статей по экономическим вопросам. По этому поводу рекомендуем вниманию читателей статью М. Н. Петрова «Николай Павлович Петров. Очерк жизни и идей. Изд. Русск. техн. общ.», 1925 (*Ред.*).

ным образом на библиографическом материале, касающемся его научных работ, но не охватывающем всей его деятельности. Между тем его деятельность способствовала не только высокому развитию технической науки и приложению ее к практике, но и оказала значительное влияние на все стороны строительства, развития и эксплоатации нашей железнодорожной сети. Вместе с тем она вела к расширению технического образования масс и обоснованию тесной связи между экономикой русских железных дорог и экономикой промышленности и всего народного хозяйства в целом. Это положение тогда не было общепризнанным, а главное, противоречило интересам многих.

Сказанное заставляет коснуться в дальнейшем изложении также общественной и государственной деятельности Н. П. Петрова.

Николай Павлович Петров был одним из выдающихся ученых XIX века в области приложения механики к техническим проблемам. Вопрос о трении в машинах до него не был решен, несмотря на продолжительные изыскания многих физиков и инженеров всего мира и на назревшую необходимость решить этот вопрос для практического применения. Объяснялось это сложностью всего комплекса явлений трения при смазке.

Этим вопросом занялся Н. П. Петров. Созданная им гидродинамическая теория трения, т. е. теория трения между твердыми телами, разъединенными слоем смазки, является его главным вкладом в науку. Он первый осветил и сформулировал это явление математически и подчинил силу трения в машинах точному измерению и регулированию; он же был первым экспериментатором, нашедшим опытным путем подтверждение своей теории и указавшим путь, по которому следует итти для уменьшения вредных сопротивлений в механизмах. Железнодорожная наука обогатилась его трудами по всем основным вопросам железнодорожной техники. Помимо вопроса о трении, Н. П. занимался многими другими вопросами, среди

которых выделяются два особо важных: тяговые расчеты и расчет рельсов.

В вопросах тяговых расчетов Н. П. Петров был пионером. Точный математический анализ он внес в вопросы сопротивления и безопасности движения поездов, решавшиеся прежде исключительно эмпирическим, далеко не точным путем.

Таким образом, им устанавливались в начале развития русской железнодорожной сети рациональные методы проектирования и эксплоатации железных дорог.

Вопрос о расчете рельсов представлял в свое время непреодолимые математические трудности. Для получения приближенных расчетов напряжений в рельсах, возникающих под действием подвижного состава, вводились очень большие упрощения, сильно искажавшие сущность явления.

Н. П. Петров предложил новый метод решения этого вопроса, основанный на опыте и наблюдениях, и ввел предположения, весьма близкие к действительности, включая допускаемые неправильности рельса и колеса.

Его блестящий метод начертания зубчатых колес в виде дуг круга отличается простотой и точностью. Этой работой положено начало научно-технической деятельности Н. П. Петрова. Созданная им теория тормозов, основанная на понятии об идеальном тормозе, дала способ оценки действия любой тормозной системы и является ценным вкладом в прикладную механику.

Лекции Н. П. Петрова отражали его собственные идеи, шли впереди современности и из них было смело исключено все непроверенное и преходящее. Своим слушателям и ученикам-технологам он давал научное освещение всех важнейших вопросов железнодорожного дела, в частности железнодорожной тяги, и привлекал их к дальнейшим работам в этом направлении. Работы эти печатались в технической литературе.

Русские политехнические институты во многом обязаны ему своим возникновением и разработкой программ.

В область экономики железнодорожного транспорта Н. П. Петров внес присущий ему метод точных наук и выдвинул новый «Критерий для железных дорог».

Длительное пребывание его на посту председателя Русского технического общества способствовало расширению деятельности этой, в свое время самой большой общественно-технической организации в России и существенно подняло авторитет ее постановлений.

Высоко ценя русскую науку и русскую технику, Н. П. Петров в своих многочисленных речах подчеркивал перед русским обществом заслуги русских деятелей на этом поприще; тем же духом была проникнута его речь на Международном железнодорожном конгрессе в Петербурге, произнесенная после избрания его председателем этого конгресса.

Черта стройной цельности в разнородных областях работы — в науке, преподавании, общественной и государственной деятельности, даже в службе — должна пройти связующей линией через всю жизнь Н. П. Петрова. Образ его выступил бы перед нами более ясно на фоне его окружения в течение его долгой жизни, но за недостатком материалов мы указываем лишь некоторые важнейшие черты его деятельности.

* * *

Родился Николай Павлович Петров 13 мая 1836 г. в г. Трубчевске, б. Орловской губернии. Детство его до 13 лет прошло в Белозерском уезде, б. Новгородской губернии, в доме отца. Родителей своих он вспоминал с почитанием и говорил об их гуманности в мрачные времена крепостного права.

Семья состояла из трех братьев и четырех сестер. Родители располагали небольшими материальными средствами, и у них не было никаких связей и протекций. В войсках служили и воевали его предки, в войсках суждено было сражаться и его внукам.

После неудачи с поступлением в Институт корпуса инженеров путей сообщения, куда его по неизвестной причине не приняли, отец отдал его в корпус, называвшийся Дворянским полком.

Уже на школьной скамье обнаружились необыкновенно привлекательные черты личности Н. П. Петрова, благодаря которым у него легко создавались живые и непринужденные отношения с людьми. Он обладал живым характером и гуманными взглядами, действовал всегда самостоятельно и справедливо, и это помогало ему больше, чем высокое служебное положение, достигать ставившихся им целей.

Вследствие его необыкновенной скромности, к сожалению, нередко замалчивалось его имя.

Корпус Н. П. окончил в 1855 г. и был выпущен прапорщиком. Он говорил, что уже тогда все умственные его интересы были сосредоточены только на математике. После этого он сразу же поступил в Николаевскую инженерную академию. Там ему посчастливилось учиться у знаменитого математика М. О. Остроградского, оставившего его по окончании академии при своей кафедре и, как говорил Н. П., дружески руководившего его занятиями. Н. П. всегда с особым почитанием вспоминал этого ученого, приписывая свое умение владеть математическим анализом его необыкновенному дару не только передавать правильные математические понятия в увлекательных лекциях, но представлять красоту и силу науки в таких формах, которые внушали веру в могущество знания. В это время Н. П. посещал в качестве вольнослушателя лекции в университете и Педагогическом институте.

Руководство первыми шагами молодого ученого в прикладной механике принадлежало знаменитому инженеру и профессору И. А. Вышнеградскому, впоследствии министру финансов. Занимаясь в Технологическом институте, Н. П. при участии Вышнеградского выполнил свою первую инженерную работу при постройке Охтенского порохового завода, для которого

он проектировал весьма остроумный и отлично действующий прибор для передвижения регулирующего щита при устройстве турбины с горизонтальной осью, а также насосы для вдавливания масла под цапфы больших турбин. Впоследствии сферы деятельности И. А. Вышнеградского и Н. П. Петрова близко соприкасались, и в течение многих лет их связывала тесная дружба.

После смерти академика Остроградского Н. П. продолжал временно вести его курс высшей математики. Дверь к профессуре казалась ему открытой, но в действительности эта цель еще не была столь близка; к своему огорчению, он был назначен преподавателем в Инженерное училище. Вскоре, однако, по предложению Г. Е. Паукера, Н. П. был командирован за границу для усовершенствования в прикладной механике, особенно по части машиностроения. Там он продолжал свое образование в 1866 и 1867 гг. Одновременно он изучил три иностранных языка.

Вернувшись в Россию, Н. П. стал преподавать прикладную механику в Инженерной академии и Технологическом институте. Вскоре появились и его первые научные исследования. В 1873 г. было положено начало деятельности Н. П. на железных дорогах в качестве ревизора для заведывания делами по подвижному составу и тяге Главного общества. В том же году он был избран профессором Петербургского технологического института, где им был введен новый предмет преподавания — о подвижном составе железных дорог и, таким образом, сделан шаг, имевший важные последствия для успехов железнодорожного дела в России.

В первом же литографированном издании этого курса мы встречаем некоторые новые идеи автора и как бы программу его будущих трудов, в том числе теоретически обоснованные формулы сопротивления поезда на железной дороге.

Начало изучения этого вопроса было положено Стефенсоном, и с тех пор по всей Европе производились обширные опыты и предлагались всевозможные эмпирические формулы силы сопротивления, но, по выражению Н. П., их нельзя было

назвать научно-техническими, так как наблюдатели не подразделяли всего явления на его составные части. Общего вывода из произведенных опытов сделать было нельзя, ибо совокупность сочетаний в обстановке, весьма вероятная на одной дороге, оказывалась недостаточно вероятной на другой. Поэтому результаты опытов не совпадали и приводили к неодинаковым выводам. Для разрешения вопроса о сопротивлении поезда Н. П. не пошел по пути эмпиризма. Избранный им научный путь представлял большие трудности, на преодоление которых потребовалось много лет, но именно этот путь привел к разрешению очень важного для техники и неизмеримо более интересного вопроса — вопроса о трении. Уже в первых литографированных изданиях курса, вопреки распространенному тогда мнению, что коэффициент трения шипов в подшипниках не зависит от скорости, распределения давления и в значительной степени от температуры, Н. П. на основании многочисленных прежних опытов и своих собственных на Варшавской железной дороге указал на весьма существенное влияние этих факторов.

В последующей, и даже значительно более поздней, литературе предмета встречаются многочисленные ссылки и целые выдержки из курса Н. П. Петрова не только по вопросам о сопротивлении поезда, но и о методах определения главных размеров паровозов, расчета ведущих колес, спиральных рессор и т. д. Несомненно, что в дальнейшем отдельные выводы, получившие у Петрова впервые свое обоснование, заменятся более совершенными, но самые методы, примененные им для разрешения этого вопроса, не утратят своего значения.

Курс подвижного состава Н. П. читал до 1892 г. — конца своей профессорской деятельности в Технологическом институте. Параллельно он состоял до 1900 г. профессором паровой механики в Военно-инженерной академии.

Как профессор Н. П. относился снисходительно к незнанию его слушателями подробностей, но строго требовал отчетливого понимания главных принципов исчисления бесконечно малых

и основ механики. Это создало ему репутацию строгого экзаменатора.

Научная деятельность Н. П. началась с 1871 г. исследованием вопроса об очертании зубьев круглых цилиндрических колес при помощи дуг круга. Несколько статей о зубчатых колесах стоят в его трудах особняком, но все они имеют одну общую черту — всегда своеобразную и удачную постановку вопроса.

Необходимость простого метода для точного начертания зубцов для плавности хода механизмов в его время сознавалась и привлекала внимание выдающихся ученых, искавших возможно более точной замены сложных циклических кривых дугами кругов.

В первом своем труде Н. П. Петров стал на новую точку зрения: непосредственно искать для очертания зубьев круговые дуги, точнее всего удовлетворяющие плавности хода. Мысль состояла в том, чтобы неизбежную тут ошибку выразить функцией всех элементов построения очертаний и затем искать ее минимума. Найденное выражение неточности оказалось возможным разложить в быстро сходящуюся строку Маклорена, и затем оставалось приравнять нулю столько первых членов этой строки, сколько нужно было составить уравнений, чтобы определить все искомые элементы построения. Таким образом, автору удалось впервые достигнуть третьего приближения в точности и показать, что известное уравнение Савари и способ Виллиса являлись лишь вторыми приближениями в его методе и что найденное третье приближение, в противоположность ранее получавшемуся второму, стояло по точности не ниже достигнутого уже тогда для прочих частей механизмов.

Через 10 лет после Н. П. Петрова тот же вопрос был разрешен академиком П. Л. Чебышевым еще более точно. Но и первое решение Н. П. Петрова и решение П. Л. Чебышева касались только пары сцепленных колес. Не ограничившись такой частностью, Н. П. Петров в 1873 г. аналогичным методом дал решение для любой системы.

Каждая из этих работ была награждена первой премией «Инженерного журнала». Но Н. П. не издал их на иностранных языках, и потому они остались неизвестными в иностранной технической литературе.

За 75 лет, прошедших теперь со времени опубликования метода Н. П. Петрова, техника зубчатых зацеплений сделала ряд шагов вперед, но этот метод сохраняет право быть увековеченным в истории технической науки как поучительный пример составления необходимых уравнений из разложений в ряд хорошо выбранной функции.

На дальнейшую работу Н. П. повлияла его служба в Главном обществе, продолжавшаяся до 1885 г. Научное исследование потребовало долгой подготовки и многочисленных опытов и заняло пятилетний промежуток времени до появления в печати следующих его трудов. В них научное обоснование всегда приводило к практически исчерпывающим выводам, часто недоступным чистым теоретикам по незнакомству с практикой, а практическим инженерам — по недостаточному владению математическими приемами. В то время не было исследовательских учреждений, подобных современным нам научно-исследовательским институтам.

В 1876 г. Н. П. был командирован на Всемирную выставку в Филадельфию. Эта поездка, а также поездка его в Германию, Францию и Англию в 1873 г. дали материал для исследования о перевозке и хранении хлебного зерна и каменного угля, появившегося в 1882 г. Эти исследования впервые осветили для русской техники вопрос о механическом оборудовании портов и железнодорожных станций и о методе экономической их оценки.

В 1878 г., во время Русско-турецкой войны, Н. П. удачно выполнил погрузку на вагоны небольших курсировавших по Неве пароходов для переправы наших войск через Дунай. Трудность этой весьма срочной работы заключалась в том, что пароходы едва умещались в габарит мостов и то лишь после установки на них придуманных Н. П. Петровым особых стяги-

вающих приспособлений. За заслуги во время этой войны он был произведен в инженер-генерал-майоры.

В 1878 г. в «Известиях СПб. Технологического института» появилась статья Н. П. Петрова о непрерывных тормозных системах, где дан обзор бывших тогда систем этого рода, но главное заключалось в теоретической части этой статьи.

Возможность скорого и безопасного движения тяжеловесных поездов обусловливалась правильным решением вопроса о тормозах; поэтому естественно, что железные дороги всего мира изыскивали способы усовершенствования тормозов и ставили многочисленные опыты для сравнения изобретавшихся систем. Однако толкование опытов не могло быть ни достаточно верным, ни достаточно полным до тех пор, пока не был найден теоретически истинный предел быстроты действия какой бы то ни было из возможных систем. Предел этот, или понятие об идеальном тормозе, сравнение с которым дает способ для оценки всякой тормозной системы, и был найден Н. П. Петровым в его исследовании 1878 г.

Чтобы разрешить несложный на первый взгляд вопрос о том, какое давление нужно произвести тормозными колодками на колеса для скорейшей остановки поезда, предстояло проследить всю сложную зависимость между нажатием колодок и сцеплением колес с рельсами в трех фазах движения: при вращении без скольжения, при вращении со скольжением и при одном скольжении, имея в виду переменность коэффициента трения от скорости. Исследование полученных уравнений впервые показало, что наибольшая скорость остановки получилась бы в системе, способной во все время торможения удерживать вращение колес на границе скольжения их по рельсам; но для этого давление колодок должно быть переменным, с определенной зависимостью этого давления от скорости. Вместе с тем оказалось, что в системах с постоянным давлением требование полного отсутствия скольжения уменьшает эффект торможения не менее чем до 64% от идеального.

Результаты новой теории тормозов нашли в скором времени подтверждение в опытах, произведенных в Англии инженером Гальтоном.

Хронологический порядок изложения приводит нас теперь к началу восьмидесятых годов прошлого столетия и, таким образом, к появлению основной работы Н. П. Петрова о трении, получившей в настоящее время широкую известность. Эта работа была помещена в «Инженерном журнале» за 1883 г. под заглавием «Трение в машинах и влияние на него смазывающих жидкостей» и удостоена затем Ломоносовской премии Академии Наук.

Вопросам трения в трудах Н. П. Петрова посвящена 21 работа, общим объемом в несколько томов, начиная с доклада 1882 г. в Техническом обществе «О применимости разных смазочных масел к механизмам разного рода» и кончая статьей 1905 г. в «Записках Т. О.»— «Гидродинамическая теория трения до работы Зоммерфельда и сущность сделанного им шага вперед».

Эти работы доставили Н. П. Петрову мировую известность и он получил вполне заслуженное название «отца гидродинамической теории смазки».

В истории учения о силах трения известно два крупных открытия: 1) установление Амантоном и Кулоном (1781 г.) основных законов трения несмазанных и плохо смазанных тел и 2) открытие Н. П. Петровым (1883 г.) закона трения при смазке.

Классические исследования Кулона являются почти исключительно экспериментальными. Результаты их в настоящее время должны рассматриваться как очень далекие от истины для машин при наличии смазки, а потому имеющие приложимость лишь в случаях, когда речь идет о сопротивлении движению одного твердого тела по другому без смазки.

Эти работы не повлекли за собою крупных исследований, несмотря на то, что способствовали утверждению в механике правильных представлений о трении.

Работы Н. П. Петрова носят характер теоретического исследования, подтвержденного точным экспериментом. Строгая математическая трактовка проблемы, распространяющаяся на всевозможные случаи трения при смазке, и тщательная экспериментальная проверка результатов создали прочный фундамент для его гидродинамической теории и тем многочисленным исследованиям, которые появились в результате развития его идей.

Вопрос о трении при смазке выдвинулся с развитием машиностроения и особенно с расширением сети железных дорог. Чем больше приходилось делать затрат на топливо для приведения в движение бесчисленных механизмов, распространившихся по всему миру, тем настоятельнее становилась необходимость разрешения этого вопроса.

Одновременно возникал весьма существенный вопрос о применимости для смазки минеральных масел и об использовании на их изготовление нефтяных остатков, а также о нужных ассортиментах масел для смазки. Все эти вопросы получили в труде Петрова исчерпывающее решение, и громадным количествам нефтяных остатков было найдено обширное поле выгодного применения. Для России, богатой нефтяными промыслами, это было ценным приобретением.

В вводной части к своему исследованию Петров так определяет свою задачу: «Расходы на топливо для машин, считающиеся у нас в России десятками миллионов, заслуживают самого серьезного внимания. Увеличение расходов на топливо на 5, на 10% может легко явиться вследствие неудовлетворительных условий смазывания, а это выразится в народном хозяйстве потерей миллионов рублей.

Таковы теперь причины, заставляющие наших техников обратить внимание на правильный выбор смазочных материалов.

Те же причины побудили и меня написать эту статью, чтобы по мере сил моих содействовать развитию техники».

Чтобы определить силы трения при смазке, были сделаны многочисленные опыты, однако все исследования приводили к неодинаковым результатам, казавшимся даже противоречивыми. Причиной тому было отсутствие руководящих предположений о законе, связывающем все элементы сложного явления, возникающего при трении смазанных твердых тел.

Петров в самом начале своей работы обратил внимание на то, что все исследователи не пытались обосновать сущность явления при смазке, приняв в расчет замечание практиков, что для смазывания машин можно употреблять только такие жидкости, которые под действием сжимающих сил не вытесняются из пространства, предназначенного для них между твердыми телами.

Таким образом, в основу была положена мысль, что при правильном смазывании твердые тела все время разделены слоем смазки, а потому непосредственного соприкосновения и трения между ними не происходит. Отсюда, говорит Петров, «сила трения твердых, хорошо смазанных тел, отделенных друг от друга жидким слоем, вызывая движение этого слоя относительно твердых тел и движение внутри самого слоя, состоит из некоторой совокупности сил трения жидкого слоя с твердыми телами и сил трения, развивающихся внутри самого жидкого слоя».

Эта гениальная мысль стала основой гидродинамической теории трения, ибо теперь уже вопрос о силе трения двух хорошо смазанных твердых тел сам собою переходил в область гидродинамики и вместе с тем обнаруживались те физические свойства смазывающих жидкостей, которые могут оказать влияние на силу трения смазанных ими тел. Свойства эти, очевидно, суть: внутреннее трение смазывающей жидкости и ее внешнее трение с твердыми телами.

До какой степени был сложен поставленный вопрос, видно из совокупности совместно действующих факторов, сопровождающих трение при смазке, а именно:

1) тепловой режим фрикционного узла, обусловливающий величину сил внутреннего и внешнего трения слоя смазки и зависящий от теплопроводности и теплоемкости соприкасающихся машинных частей и от температуры окружающей среды;

2) толщина смазывающего слоя, зависящая от гидродинамического давления, скорости и коэффициентов внутреннего и внешнего трения смазки;

3) режим подачи и отвода смазки;

4) состояние трущихся поверхностей;

5) деформация этих поверхностей, зависящая от различия температур, истирания и изгиба;

6) свойства смазки.

Все эти элементы при совместном действии затемняли влияние каждого из них в отдельности. Поэтому естественно, что исследователи, искавшие решения этого вопроса без соответствующего теоретического обоснования, были заранее обречены на неуспех — результаты их опытов не согласовывались и даже противоречили друг другу.

Никаких общих выводов из этих исследований сделать было нельзя до тех пор, пока опытам не была предпослана общая теория, приводящая все стороны явления в закономерную связь.

Бесплодность делавшихся до Петрова попыток оставляла дело смазки во власти эмпирики. Развитию машиностроения наносился серьезный ущерб за счет малой жизнеспособности фрикционных узлов и невозможности, без риска аварий, расширить ассортимент смазок.

Во всяком случае опыты, произведенные до возникновения гидродинамической теории, имели одно важное следствие: они заставили окончательно признать теорию, созданную Кулоном для твердых тел, неприменимой при наличии между ними смазки. Только этот отрицательный результат и был ими достигнут.

Таким образом, исследования Петрова о трении представляют пример освещения важного вопроса техники методами гидродинамики, оказавшейся уже тогда в состоянии не только найти пути для примирения всех противоречий прежних наблюдений, но и привести их результаты в один стройный ряд, подчиненный общему, ранее неизвестному закону, поставив силу трения в ряд тех сил, которыми, по выражению Петрова, механика может располагать в своих целях, и указав, какими способами или средствами можно заставить эту силу изменять свою величину в желаемом направлении.

Следующий, решающий шаг автора состоял в том, что он уподобил явление движения и сопротивления при смазке между цапфой и подшипником явлению движения и сопротивления слоя жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами, вращающимися один относительно другого, при предположении, что в этом случае жидкость расслаивается и тончайшие ее слои увлекаются поверхностями цилиндров, что слои эти не смешиваются между собой и сохраняют постоянное расстояние от поверхностей цилиндров и, наконец, что справедлив закон Ньютона о пропорциональности интенсивности трения жидкостей первой степени относительных скоростей слоев.

Но этот закон не находил тогда общего признания, и многие наблюдения, казалось, говорили против него. Поэтому Петрову пришлось уделить бо́льшую часть своей работы доказательству справедливости названного закона. Эта часть исследования нашего ученого, в которой он существенно содействовал установлению основ гидродинамики реальной жидкости, имеет в истории механики не меньшее значение, чем вторая часть, в которой им был найден закон трения при смазке.

Петров подверг чрезвычайно глубокому и поучительному исследованию многочисленные наблюдения ученых, приводивших к заключениям, противоречившим гипотезе Ньютона, и доказал, что все эти противоречия происходили от нарушения

при опытах параллельности траекторий частиц жидкости (условия ламинарности) и возникновения вихревых движений. Это положение теперь общепринято.

Несколько лет спустя после Петрова та же мысль была высказана известным исследователем по гидродинамике Осборном Рейнольдсом.

Таким образом, обширный отдел труда посвящен критическому исследованию эволюции гипотезы Ньютона в продолжение почти двух веков. В этой эволюции отмечен ряд интересных для науки моментов.

После ряда опытов XVIII в. над движением воды в каналах, приводивших скорее к заключению о пропорциональности сил внутреннего трения второй степени относительных скоростей, и опытов Кулона, говоривших в пользу двучлена с первой и второй степенями, замечателен вывод, сделанный Навье: принимая гипотезу Ньютона, он приложил свои известные уравнения гидродинамики к вычислению объема жидкости, протекавшей через трубки в опытах Жирара, но получил возможность согласовать выводы с результатами опытов лишь при условии незначительности коэффициента внешнего трения по сравнению с коэффициентом внутреннего трения; теперь известно, что эти условия находятся в прямой противоположности с действительностью.

Таким образом, на опытах Жирара гипотеза Ньютона подтверждения не получила. Однако Петров, обнаружив причину противоречия в несовершенстве опытов Жирара, показал, что результаты классических опытов Пуазейля вполне согласуются с теорией, подчиняясь закону Ньютона при правильном отношении между обоими коэффициентами трения, и что ряд попыток некоторых ученых математически согласовать результаты тех же опытов с допущением неточности указанного закона не имел основания.

Таким путем все возражения были устранены, и закон, подвергавшийся проверке, нашел несомненное подтверждение.

Перейдя к вопросу о законе трения при смазке, Петров рассмотрел наиболее распространенный в машинах фрикционный узел в виде соосных цилиндров, разделенных тонким слоем смазки.

Исходя из принятых условий, оказалось возможным вычислить влияние внутреннего и внешнего трения жидкости на величину момента внешних сил, вращающих внутренний цилиндр.

Решение именно этого вопроса и привело Петрова к установлению закона трения при смазке, гласящего, что при постоянной температуре смазывающей жидкости сила трения двух смазанных цилиндров пропорциональна коэффициенту внутреннего трения смазывающей жидкости, соответствующему данной температуре, пропорциональна первой степени относительной скорости этих тел и пропорциональна величине поверхности трения; она обратно пропорциональна сумме толщины смазывающего слоя и двух отношений коэффициента внутреннего трения к коэффициенту внешнего трения о каждую из поверхностей трущихся тел также при данной температуре.

Н. П. Петров рассмотрел влияние на результат ряда вышеупоминавшихся факторов: состояния поверхностей трения, температуры, деформации фрикционного узла, условий подачи смазки и давления. Он определил затем условия возникновения эксцентриситета (асимметрии положения) и учел его влияние на результат. Наконец, он показал, что ни одна из известных ему работ в той же области не противоречила закону.

Через несколько лет после Петрова этот вопрос исследовал О. Рейнольдс, а в наиболее простом и общем виде разрешил Зоммерфельд, считавший Петрова «отцом гидродинамической теории смазки».

В 1883 г. Петровым были предприняты обширные опыты над трением, продолжавшиеся почти три года. Результаты этих опытов в окончательном виде были опубликованы в «Известиях СПб. Технологического института» в 1886 г. под заглавием: «Трение в машинах и влияние на него смазывающей жид-

-кости. Описание и результаты опытов над трением жидкостей и машин». Эту работу Академия Наук удостоила так называемой Макарьевской премии.

В весьма интересной рецензии об этом труде, представленной Академии Наук, профессор В. Л. Кирпичев отметил многочисленные и весьма ценные научные достижения этой работы. Сравнивая работу автора с исследованиями его предшественников, Кирпичев пишет: «Хотя, начиная свою работу, он имел в виду, между прочим, чисто практическую цель — нахождение верного способа исследования годности минеральных масел для смазки подвижного состава железных дорог,— но он возвысился над грубым эмпиризмом, остающимся почти всегда бесплодным. При всех своих трудах он придерживался известного правила Понселе, что «без светоча теории практика не может итти к истинному совершенствованию». И в вопросе о трении, так же как и в других областях техники, подтвердилось то правило, что, чем выше и точнее теория, тем плодотворнее сказываются результаты для практики. Сочинение Н. П. Петрова по справедливости может быть причислено к тем истинным совершенствованиям, о которых говорит Понселе».

Строго следуя пути, намеченному в теории, опыты были разделены на две основные группы.

Первой, чисто физической группой преследовалась цель точного определения коэффициентов внутреннего трения и их зависимости от температур и возможного уяснения значений коэффициента внешнего трения для различных масел.

Нужно сказать, что до того времени коэффициенты внутреннего трения были определены только для воды благодаря опытам Пуазейля, а для масел (как оказалось — не вполне точно) лишь для сурепного благодаря опытам Мейера.

О коэффициенте внешнего трения не было ясного представления.

В квартире Петрова производилась эта группа опытов над протеканием жидкостей в длинных капиллярных стеклянных

трубках разных диаметров при широко изменявшихся давлениях и температурах.

Второй группой опытов преследовалась цель установить способы оценки смазывающих качеств жидкостей в зависимости от сил трения, возбуждаемых при всевозможных условиях, встречающихся в машинах.

Приборами для второй группы служили машины Ингема и Стемфора (машина Бели) и машина собственной конструкции Петрова, состоявшая из вагонной оси, поставленной на особом станке в условия, позволявшие исследовать трение и смазку в обычных условиях движения на железных дорогах.

Первой группой были определены коэффициенты трения и кривые их изменения от температур для трех органических масел, двенадцати минеральных и нескольких смесей. При этом был между прочим открыт закон, важный для изготовления смазок, по которому прибавление к менее подвижной жидкости более подвижной жидкости уменьшает внутреннее трение первой жидкости значительно менее, чем можно было бы ожидать по правилу смешения.

Впервые было получено представление о размерах сил внешнего трения и выяснилась несостоятельность прежних методов оценки смазок по признакам плотности, температурам вспышки и воспламенения, не дававшим, как оказалось, материала для знания важнейшего свойства смазки — ее внутреннего трения.

Зависимость внутреннего трения от температуры смазки, естественно, выдвинула вопрос о тепловых явлениях при трении в машинах.

Переход поглощенной части работы трения в тепло позволил получить при помощи найденного выражения силы трения уравнения, связывающие работу трения с количеством выделенного тепла.

Это уравнение привело к простому графическому способу, при помощи которого, зная по опыту с одним каким-либо маслом при некоторой внешней температуре силу трения в какой-

либо машинной части и имея на чертеже кривые зависимости внутреннего трения от температуры для ряда смазок, можно тотчас же определить силу трения в той же машинной части при другой смазке и при любой внешней температуре.

В 1900 г. в мемуаре под заглавием «Трение в машинах» (на франц. яз.), помещенном в «Записках Академии Наук», Петров опубликовал в более общем виде свою теорию смазки.

Полученная им формула определяет зависимость смазывающего действия от относительных положений осей и разницы диаметров подшипника и вала; первоначальная формула получается из нее как частный случай.

Эта работа стоит в связи с теорией смазки О. Рейнольдса, опубликованной уже после знаменитой работы 1883 г.

На протяжении 25 лет Петров написал по вопросам трения еще ряд статей, между прочим о приложении гидродинамической теории и опытов к железным дорогам и бумагопрядильням. Изложение высказанных там идей выходит из рамок этой статьи; скажем еще только, что в 1888 г. Петров выставил на бывшей в Петербурге выставке нефтяного производства свой прибор для определения внутреннего трения жидкостей. Русское техническое общество, принимая во внимание крайнюю простоту способа сравнения достоинства смазывающих материалов, особенно минеральных масел, присудило ему за это большую золотую медаль.

В 1885 г. Петрову пришлось покинуть службу в Главном обществе российских железных дорог вследствие объявленного тогда запрещения совмещать военную службу со службой в частных обществах. Он не захотел покидать профессуру в Военно-инженерной академии после 30 лет работы и предпочел отказаться от высокооплачиваемой должности члена Совета Общества. По этому поводу нельзя не отметить той резко выраженной черты Н. П., что денежный вопрос стоял у него на последнем плане. Вспоминается между прочим, что, когда ему было предложено место директора Александровского паровозо-

стротельного завода с очень большим окладом, он отклонил и это предложение, так как считал, что хозяйственные заботы отняли бы у него слишком много времени от научной работы.

В 1887 г. Н. П. Петров начал серию работ о безопасности железнодорожного движения при увеличении скорости поездов и опубликовал ряд работ в этой области. Министром путей сообщения был назначен в 1888 г. ученый военный инженер Паукер, вскоре, к сожалению, умерший, а Петров был назначен председателем управления казенных железных дорог. В этой должности он пробыл до середины 1892 г., совмещая с 1893 г. должность директора Департамента железных дорог и оставаясь профессором двух высших учебных заведений. В то время к бывшим в казенном управлении дорогам, протяжением около 50 000 верст, присоединилось еще 5000 верст, причем от частных обществ перешли в казну дороги Ряжско-Вяземская, Моршанско-Сызранская, Курско-Харьково-Азовская и было окончено постройкой несколько казенных дорог, в том числе Самаро-Златоустовская. Тогда же строился самый большой в России Сурамский тоннель, началась постройка дорог в наиболее отдаленной окраине — Уссурийской области и изучался проект сибирской магистрали.

Административно-организационная деятельность и осмотры железных дорог, казалось, должны были поглотить все время и энергию Петрова, тем не менее и к тому времени относится несколько его сочинений по вопросам железных дорог и механики.

С целью увеличить безопасность движения поездов на железных дорогах Петровым было написано несколько статей по тяговым вопросам. Серия в общем девяти работ по этим вопросам, включающая уже упоминавшийся курс сопротивления поезда 1889 г., [1] началась в 1885 г. исследованием под заглавием «Нормы расхода паровозами топлива» в «Известиях Технологического

[1] Здесь говорится о печатном издании курса.

института» и закончилась в 1904 г. статьей «К вопросу о сопротивлении паровоза и силе его тяги» в «Записках Технического общества».

В статье 1890 г. под заглавием «Определение скоростей поезда на железной дороге при возможном увеличении безопасности движения», помещенной в «Известиях Технологического института», Петров дал указания для расчета скоростей, при которых подвижной состав, не обычный на данной дороге, мог бы следовать с той же степенью безопасности, как и обычные на этой дороге поезда, принимая в соображение навык машинистов, профиль и план линии и условия торможения.

Повидимому, также в связи с вопросом о безопасности движения поездов весьма важным был вопрос, является ли достаточно безопасной двойная тяга. Петров, сравнивая условия движения одиночной и двойной тягой, привел соображения, доказывающие сравнительно бóльшую безопасность двойной тяги при не меньшем спокойствии движения. Эта статья, также 1890 г., помещена в тех же «Известиях».

Безусловно опасными Петров считал такие скорости, при которых может расшиваться рельсовая колея вследствие извилистости движения паровоза, происходящей от неуравновешенности движущихся на нем масс.

Тяговые расчеты, разработанные Петровым в его курсе сопротивления поезда, получили применение между прочим в его сочинении «О наивыгоднейших скоростях движения товарных поездов и о способах определения скоростей воинских поездов на железных дорогах», помещенной в 1892 г. в «Инженерном журнале». В этом сочинении приведен анализ зависимости скоростей поездов от числа вагонов и порядка следования теми или иными группами по графику движения для наивыгоднейшего использования пропускной и провозной способности железных дорог.

В группе работ Петрова, относящейся к отдельным частям подвижного состава, куда входит и рассмотренное здесь иссле-

дование о непрерывных тормозных системах, значится небольшая статья 1879 г. «Об изнашиваемости и пробе стальных шин», выпущенная отдельным изданием. Заботы о безопасности движения поездов побудили его в 1891 г. возвратиться к тому же вопросу. В статье «Насадка шин на колеса и колес на оси», помещенной в журнале Министерства путей сообщения, он показал, каким образом большие остаточные напряжения, проявляющиеся в шинах после насадки на колеса, со временем, после достаточного пробега, переходят во внеупругие напряжения обратного направления, и выяснил всю невозможность пользоваться какими бы то ни было расчетами, относящимися к только что насаженным шинам, для суждения о явлениях в шинах, сделавших некоторый пробег. К последнему заключению его привели опыты с вырезыванием из шин по ободу катания ряда колец в разных местах по толщине шины, причем оказалось, что кольца, ближайшие к наружной поверхности шины, после вырезывания значительно удлиняются, а внутренние, наоборот, укорачиваются. В той же статье дано понятие о внеупругих напряжениях, получающихся в колесных ступицах и в осях, после насаживания колес на оси и о направлении, в котором должно итти усовершенствование приемов насадки колес для избежания таких напряжений.

В 1892 г., по инициативе Петрова, при Министерстве путей сообщения был образован Инженерный совет для рассмотрения важнейших технических вопросов и он был назначен первым председателем, а впоследствии, по оставлении им службы в министерстве,— почетным членом этого Совета.

Тяжелое бремя управления железными дорогами, связанное с множеством досадных мелочей, лишавших Н. П. спокойствия и отрывавших его от научной работы, было снято. Однако вскоре ему предстояла новая деятельность еще на 25 лет. В том же 1892 г. Н. П. Петров был назначен товарищем министра путей сообщения. В этой должности он пробыл до 1900 г., оставаясь в то же время профессором Инженерной академии

и занимая в течение 10 лет по избранию пост председателя Русского технического общества.

Под его общим идейным руководством продолжалось и было закончено строительство великого Сибирского пути. В качестве председателя вневедомственной комиссии, которой было поручено обследование на месте этого строительства, Петров представил отчет, изданный Министерством путей сообщения в 1894 г. Отчет содержит материалы, интересные не только для истории Сибирской железной дороги, но и для рек Сибири как подъездных путей. Можно видеть, как тогда развивалась мысль по одному из чрезвычайно важных вопросов, получивших теперь широкое разрешение.

В то время в ведомстве Министерства путей сообщения находился только Петербургский институт инженеров путей сообщения. Прием в этот институт, по настоянию Петрова, в 1894 г. был увеличен в два слишком раза; затем, по его почину, в Москве было открыто Инженерное училище того же ведомства. Это была высшая школа, но только с трехлетним курсом обучения и двухлетней практикой; впоследствии это учебное заведение было преобразовано по типу петербургского института.

К научным трудам Н. П. Петрова того времени относятся два исследования 1893 и 1894 гг. «О влиянии трения при передаче работы упругим ремнем», напечатанные в «Известиях СПб. Технологического института». В небольших статьях под этим заглавием дано решение одного из важнейших вопросов прикладной механики, поставленного в простейшем виде еще Эйлером. Эйлер дал уравнение, связывающее величину сил, приложенных к концам гибкой нерастяжимой нити, огибающей цилиндр и скользящей по его поверхности с некоторым коэффициентом трения.

Н. П. Петровым дано аналогичное уравнение для упругого ремня, вращающего шкив. Исследование этого уравнения и привело к определению сопротивления при работе упругого

ремня и выяснило, что упругий ремень при передаче работы непременно скользит по поверхности шкива, возбуждая силы трения, но что угол скольжения не тождествен углу охвата и может быть меньше его.

Деятельность Н. П. Петрова в качестве председателя Русского технического общества проявилась между прочим в ряде статей и речей, отразивших его взгляды на сущность, постановку и цели технического образования. Он отстаивал необходимость уделять в высших технических школах особое внимание на твердое усвоение учащимися основ высшей математики, теоретической и прикладной механики, физики и химии. Он считал, что высшая техническая школа должна быть двух типов: для подготовки практических деятелей с четырехлетним курсом и для подготовки более глубоко образованных инженеров вроде знаменитой французской политехнической школы с двухлетним образовательным курсом. По окончании этой школы учащиеся получают право избирать любую высшую школу первого рода и изучать в ней по своему усмотрению разные отрасли. Но и об этих школах Н. П. Петров говорил, что «нельзя сжимать их курса без всякого ограничения, если самое изучение ставит целью руководство какой-либо частью техники». Такие школы, по его мнению, «должны давать людей, достаточно подготовленных к самостоятельному труду в течение долгого времени, предвидя, что питомцы их должны в будущем действовать при обстоятельствах, во многом отличающихся от всего того, что они слышали в школе». Н. П. Петров не считал возможным и в таких школах ограничиваться узкими сведениями по точным общеобразовательным наукам в объеме, лишь безусловно необходимом для изучения прикладных наук. Он говорил: «Развитие философского мышления нужно технику не менее, чем математику и естествоиспытателю». Он считал также, что в обоих намечавшихся им типах школ надо изучать технические науки в их современном виде, имея в виду не ремесло, а инженерное искусство и науку, основанную на самых точных при-

емах исследования. Он находил также, что для усвоения математики при сокращенном по времени курсе в школах первого рода упражнения в приложении анализа к геометрии должны быть заменены изучением прикладных наук в изложении, умело пользующемся методами высшей математики.

Он доказывал, что при посредстве технической науки в современном уже тогда ее развитии высшая техническая школа могла и должна была развивать способности ума наравне с университетами. Изучение высших технических знаний должно было стоять на строго научной почве.

В 1900 г. Н. П. Петров был назначен членом Государственного совета. Сорокапятилетняя его преподавательская деятельность закончилась. До 1906 г. он состоял членом Департамента промышленности, наук и торговли Государственного совета, а затем председателем 3-го департамента, ведавшего аналогичными вопросами, в том числе делами железных дорог.

В 1903 г. Н. П. Петров обследовал на месте вопрос об усилении пропускной способности горных участков Сибирской железной дороги Ачинск — Нижнеудинск и Зима — Половина. В результате этого обследования получились изданные Комитетом железной дороги «Соображения инженер-генерала Н. П. Петрова об усилении пропускной способности». Его выводы были широко использованы при постройке горных участков железной дороги.

В списке научных трудов Н. П. Петрова за время с 1903 по 1915 г. мы видим 15 заглавий, относящихся к его исследованиям по расчету рельсов и рельсового пути.

Над решением этой чрезвычайно трудной в теории упругости задачи до Н. П. Петрова работали известные ученые: Стокс, Филиппс, Резаль, Сен-Венан и др. Стокс дал дифференциальное уравнение, определяющее понижение лежащего на упругих опорах рельса под давлением катящегося колеса, но интегрирование этого уравнения представляло значительные трудности, и решения в конечном виде не получалось. Чтобы дать

необходимые правила для расчета рельсов, делались упрощающие допущения, которые, однако, настолько искажали сущность явления, что оставалась неизвестной допущенная степень неточности; в результате расчет сводился к некоторой формальности. Циммерман, например, результаты исследования которого широко применялись в железнодорожной практике, принужден был для интегрирования уравнения Стокса сделать допущение, что рельс лежит как свободная, совершенно не закрепленная по концам балка всего на двух неподвижных опорах и, кроме того, что колесо не может отделиться от рельса. Решение, полученное в конечном виде при таких предположениях, — не говоря уже о принятом условии идеальной правильности колеса и рельса, в действительности неосуществимом, а также о других, менее важных в смысле удаления от истины предположений, — рисовало явление в искажении, не поддававшемся даже приблизительной оценке.

Свойственная Н. П. удивительная смелость подхода к труднейшим научно-техническим вопросам открыла ему и в данном случае совершенно новый путь решения задачи о рельсе в самой широкой ее постановке. Математическая трудность здесь была устранена показанной им возможностью связать определение динамического влияния поступательной скорости колеса на напряжение в рельсе со статическим исследованием вопроса. Благодаря такому приему удалось заменить уравнение Стокса двумя разностными уравнениями, после чего интегрирование уже не представило затруднений.

Как и в вопросе о трении, в данном случае им была выделена и определена истинная мера влияния каждого из элементов весьма сложного явления, в состав которого при поступательном движении колеса входит и вибрация рессор, и инерция колеса, осложненная возможным несовпадением центра вращения с центром инерции, и инерция рельса со шпалами и балластом, и неправильности рельса, и разнообразная упругость балласта, зависящая между прочим от качества подбивки шпал.

Вопрос был решен впервые в 1903 г. на страницах «Записок Русского технического общества», причем рельс рассматривался тогда как балка, лежащая на двух упругих опорах. В том же году в рассмотрение были введены четыре, а затем и шесть опор. Далее, уравнение траектории точки касания колеса с рельсом было проинтегрировано с учетом неправильности колеса и рельса, и оказалось, что влияние вибраций рельса, увеличивающее динамичность лишь на 40%, значительно уступает влиянию названных неправильностей, способному повысить динамичность до 200—300%. Вопреки господствовавшему тогда мнению выяснилось сравнительно малое влияние на прочность рельса расстояния между осями шпал. Показана возможность, при сохранении большой точности, ограничиваться рассмотрением влияния лишь одного катящегося колеса до тех пор, пока расстояние между центрами колес не достигнет полутора-двух пролетов между шпалами. Для более близких расстояний дан расчет для трех и четырех колес.

Н. П. нашел решение также и для чрезвычайно важного вопроса о рациональном установлении допускаемых напряжений при расчете динамического действия колес. Оказалось возможным, не нарушая условий прочности, допускать по нашим рельсам движение со скоростью 100 верст в час там, где допускалась лишь 60-верстная скорость, при условии хорошего содержания пути и подвижного состава, но без увеличения веса рельсов.

Решение математической задачи Н. П. иллюстрировал многочисленными диаграммами с начертанием траекторий точки касания колеса и рельса, причем установил интересный закон, впоследствии доказанный аналитически Н. Е. Жуковским, по которому все траектории, исходящие из одного какого-либо положения на опоре, непременно пересекаются в одной общей точке в пределах пролета.

Выводы эти нашли полное экспериментальное подтверждение.

Не оставил Н. П. Петров без внимания и те силы, которые возникают в местах непосредственного соприкосновения колеса с рельсом и часто вызывают внеупругие деформации. Предсказанные им остаточные напряжения в рельсах, долго лежавших в пути, также были экспериментально подтверждены.

В 1915 г. Н. П. Петров выпустил отдельную книгу «Давление колес на рельсы. Прочность рельсов и устойчивость пути». В ней были сведены все его исследования как вертикальных воздействий колеса на рельс, так и горизонтальных, о которых говорилось в статье об опасных скоростях.

Еще одну сторону работы Н. П. Петрова нельзя не отметить, особенно вспоминая его сочинения о рельсах,— это буквально сотни обширных числовых таблиц, им самим вычисленных, и десятки вычерченных им же самим диаграмм.

Современный Н. П. Петрову ученый мир России высоко ценил его научные заслуги. Он был почетным членом нашей Академии Наук, многочисленных ученых обществ, всех высших технических школ, и даже Медицинской академии.

Чествование сорокалетия его научно-технической и педагогической деятельности, описанное в «Инженерном журнале» за 1911 г., было обставлено необыкновенно торжественно. Оно привлекло около 60 делегаций от всех важнейших научных учреждений и обществ, в том числе и от четырех старейших русских университетов и от Академии Наук, представителями которой были академики А. Н. Крылов, С. Ф. Ольденбург и Б. Б. Голицын.

Когда Николай Петрович поднялся на кафедру, чтобы ответить на многочисленные обращенные к нему адреса, его речь была выслушана собранием стоя. Свою речь Н. П. посвятил значению точных наук в технике.

Как уже было сказано, в 1915 г. Н. П. выпустил специальное сочинение, в котором была дана сводка всех его исследований о вертикальных и о горизонтальных воздействиях колеса на рельс.

В конце 1915 г. он был избран председателем особой комиссии для расследования причин недостатка вооружения у русской армии. В то же время Н. П. Петров продолжал свои научные работы.

15 января 1917 г. Николай Павлович, имея 80 лет от роду, заболел тяжелой формой воспаления легких. Болезнь приняла затяжной характер. Его перевезли на побережье Черного моря. 17 января 1920 г. Николай Павлович Петров скончался в возрасте 83 лет в городе Туапсе, где и находится его могила.

Во всех областях своей шестидесятилетней деятельности Н. П. Петров всегда ставил перед собой высокую цель общей пользы и достигал ее неустанными трудами в глубоких исследованиях, используя свой огромный талант.

Память о нем дорога русскому просвещению и русской технике.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Начало гидродинамической теории смазки положил русский ученый, инженер, профессор СПб. Технологического института Николай Павлович Петров. Приоритет Н. П. Петрова в этой области уже много десятилетий признан во всем мире, и он даже был назван «отцом гидродинамической теории смазки».

Исследования Н. П. Петрова начались около 1879 г. и были вызваны тем, что, будучи крупнейшим специалистом в области железнодорожного транспорта, Н. П. практически столкнулся с вопросом смазки подшипников подвижного состава железных дорог. В то время смазки растительные начали заменяться минеральными, в связи с чем возникали различного рода неполадки, исследованием которых он и занялся.

На основании своих глубоких теоретических исследований Н. П. Петров пришел к заключению, что правильная теория смазки может быть построена только путем гидродинамического исследования движения смазочной жидкости в узком канале между шипом и подшипником. Теперь, когда теория смазки изложена в учебниках, нелегко представить себе те трудности, которые приходилось преодолевать в то время. Сейчас мы имеем твердо установленные уравнения гидродинамики и при исследовании движения смазочного слоя между шипом и подшип-

ником должны их применять при вполне определенных граничных условиях. Но когда Н. П. Петров начал свои исследования, не было ясности ни относительно тех условий, которые существуют на границах движения жидкости, ни относительно самого характера этого движения. Даже такие крупные ученые, как Понселе и Сен-Венан, не были в состоянии преодолеть эти трудности.

Вот почему в своем знаменитом мемуаре «Трение в машинах», напечатанном в 1883 г., бо́льшую часть своей работы Н. П. Петров посвятил вопросу о возможности применения уравнений гидродинамики к явлениям, происходящим в смазочном слое в подшипниках. Лишь после того как он это обстоятельно изучил и проверил на основании всех доступных ему опытных исследований, он пришел к центральному пункту своей работы — построению гидродинамической теории смазки. Он сразу же правильно оценил те математические трудности, которые встречаются при попытке точного интегрирования уравнений движения вязкой жидкости в пространстве между шипом и подшипником при тех граничных условиях, которые имеют место в действительности, и при условиях подачи смазки.

Поэтому он с самого начала чрезвычайно упростил задачу, принимая поверхности шипа и подшипника за соосные круглые цилиндры. Рассматривая движение в двух измерениях и пренебрегая силами инерции частиц жидкости, он допускал возможность скольжения жидкости на поверхностях шипа и подшипника. Это было сделано им вполне сознательно в тех целях, чтобы указать, что, кроме вязкости, следует еще принимать во внимание явления, происходящие при контакте смазки с поверхностями шипа и подшипника.

Если бы Н. П. Петров ограничился только своим первым обширным мемуаром, занимающим около 250 страниц, то уже одно это давало бы ему право на научное бессмертие и славу «отца гидродинамической теории смазки». Но Н. П. был настоящим ученым. Выше всего он ставил экспериментальное

подтверждение теоретических выводов путем хорошо поставленного научного опыта. Он посвятил много труда на опытные исследования явлений смазки и на разработку вопросов внутреннего трения жидкости. В то время у Н. П. не было подходящей лаборатории для экспериментов, но это его не остановило, и он долгое время производил опыты в своей квартире и на свои личные средства.

Результаты его многолетних опытов были изложены в двух капитальных работах, напечатанных в «Известиях СПб. Технологического института» за 1886 и 1887 гг. Эти работы показывают Н. П. Петрова как искуснейшего экспериментатора.

Имея в виду практические приложения результатов своих исследований, он напечатал в «Инженерном журнале» за 1887 г. сводку этих работ с элементарным выводом своего знаменитого закона трения. Эта статья приведена в настоящем сборнике.

Всего за период 1882—1905 гг. им издано 19 работ по гидродинамической теории смазки. Весьма существенной между прочими работами является изданная Академией Наук в 1900 г. капитальная монография под заглавием «Трение в машинах», приведенная в этом сборнике. В ней дано исследование по гидродинамической теории смазки, причем теоретический анализ везде сопровождается экспериментальными данными, которые были в распоряжении Н. П. Петрова к 1900 г.

Поставленная Петровым задача о движении смазочной жидкости в пространстве двух измерений нашла полное свое решение в статье Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина «О трении смазочного слоя между шипом и подшипником», опубликованной в 1904 г. Мы сочли поэтому необходимым поместить эту статью в настоящем сборнике.

Таким образом, трудами русских ученых область применения методов Петрова получила новое расширение, и именно у нас в России. Блестящий математический талант Н. П. Петрова, одного из самых выдающихся учеников Остроградского,

как нельзя более проявился при решении приведенных здесь гидродинамических задач.

Полное всестороннее исследование движения жидкости в смазочном слое с учетом всех граничных условий и условий подачи смазки, как мы надеемся, будет сделано также нашими, советскими, учеными.

В заключение автор считает долгом поблагодарить за существенную помощь при издании этой книги кандидата физико-математических наук Н. В. Кудрявцева и С. А. Лейбензон, выполнившую перевод французской работы Н. П. Петрова.

Академик *Л. С. Лейбензон*

ПРИМЕЧАНИЯ

К СТАТЬЕ «ТРЕНИЕ В МАШИНАХ И ВЛИЯНИЕ НА НЕГО СМАЗЫВАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ»

[1] Петров, соответственно взглядам, господствовавшим в его время, принимал, что существует скольжение жидкости о стенку. Он стоит на этой точке зрения и во всех своих последующих работах по гидродинамической теории смазки, в частности в своей известной работе «Трение в машинах», напечатанной в Записках нашей Академии Наук за 1900 год. В этой работе он приводит все опытные данные, которыми он располагал в то время для определения отношения коэффициента внутреннего трения вязкой жидкости μ к коэффициенту внутреннего трения λ. Далее, при низких температурах он находит это отношение μ / λ выраженным в сотых долях.

В настоящее время принимают отсутствие скольжения жидкости о стенку и что $\mu / \lambda = 0$.

[2] У Петрова в формуле E' была сделана описка в оригинале работы. Формула E' была напечатана в виде

$$-\left[\mu \frac{du}{dr} - \nu \left(\frac{du}{dr}\right)^2\right] r\varphi dx.$$

Эта описка проходит через все вычисления, но окончательный результат верен.

[3] У Петрова стоит

$$\mu \frac{du}{dr} - \nu \left(\frac{du}{dr}\right)^2 = -\frac{Br}{2},$$

вместо

$$\mu \frac{du}{dr} + \nu \left(\frac{du}{dr} \right)^2 = - \frac{Br}{2} .$$

[4] У Петрова стоит

$$\sqrt{\mu^2 + 2\nu Br} > \mu,$$

а должно быть

$$\sqrt{\mu^2 - 2\nu Br} > \mu.$$

Во всех дальнейших вычислениях стоит неверный знак, но окончательный результат верен и величина U_0 дана правильной.

[5] Допуская скольжение жидкости о стенку, Петров вводит два коэффициента внешнего трения λ_1 и λ_2.

[6] Знаменитая формула Петрова, в которой впервые дана теоретически выведенная сила трения для вращения шипа (цапфы) в подшипнике, составила эпоху в науке и доставила Н. П. Петрову заслуженное им славное название «отца гидродинамической теории смазки». Она содержит в себе два коэффициента внешнего трения. Фигурирующий в знаменателе этой формулы двучлен

$$\mu \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right)$$

не был определен Петровым экспериментально в продолжение его многочисленных опытов. В дальнейшем он просто был отброшен, а формула Петрова (19) вполне подтверждена на основании точного решения Жуковского — Чаплыгина в том предельном случае, когда оси шипа и подшипника совпадают. Во всем рассуждении Н. П. Петрова предполагается, что толщина смазывающего слоя есть величина переменная. Необходимость эксцентриситета, т. е. несовпадение осей цапфы и подшипника, для объяснения подъемной силы цапфы была обоснована профессором Н. Е. Жуковским еще до Рейнольдса в работе «О гидродинамической теории трения хорошо смазанных твердых тел», напечатанной в 1886 г. в «Журнале Русского физико-химического общества», т. XVIII.

[7] Формула (27) Терстона в дальнейшем не получила подтверждения и может рассматриваться как эмпирическая формула, выражающая опытные исследования самого Терстона.

К СТАТЬЕ «ТРЕНИЕ В МАШИНАХ»

[1] Работа Осборна Рейнольдса «Гидродинамическая теория смазки и ее применение к опытам Тоуера» была напечатана в 1886 г. в издании Лондонского Королевского Общества «Philosophical Transactions». В ней Осборн Рейнольдс применяет к исследованию движения жидкости в смазывающем слое между цапфою и подшипником общие уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости, отбрасывая инерционные члены и предполагая равномерное вращение цапфы. При этом он принимает отсутствие скольжения как на поверхности подшипника, так и на поверхности цапфы.

Работа Н. П. Петрова «Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости» была напечатана на русском языке в «Инженерном журнале» за 1883 год. Хотя Н. П. Петров для упрощения задачи, поставленной им впервые в мировой науке, и допустил совпадение осей цапфы и подшипника, но эту упрощенную задачу он рассмотрел с более широкой точки зрения, допуская скольжение жидкости на поверхности цапфы и подшипника.

В рассматриваемой работе «Трение в машинах», напечатанной в 1900 г. в «Записках Академии Наук», VIII серия, т. 10, № 4, на французском языке, Н. П. Петров значительно продвинул вперед гидродинамическую теорию смазки, используя уравнение, данное в работе Рейнольдса, но в более широком предположении наличия скольжения на поверхностях цапфы и подшипника. Обозначения его в общем совпадают с обозначениями Рейнольдса, что облегчает сравнение этих работ и позволяет оценить прогресс, достигнутый в работах Н. П. Петрова.

[2] Н. П. Петров в рассматриваемой работе под термином «жидкий слой» подразумевает смазочную жидкость, находящуюся между подшипником и цапфой.

[3] В оригинале в правой части формулы (1б) стоит в скобках $(U_0 + U_1)$ вместо $(U_0 - U_1)$.

[4] У Н. П. Петрова стоит $\Phi'_0 - \frac{\pi}{2}$, тогда как вычисления в тексте соответствуют принятой нами величине $\frac{\pi}{2} - \Phi_0$.

[5] Н. П. Петров в своей работе обозначает через M момент сил трения, приложенных к подшипнику, а через L — полную нагрузку на подшипник, рассчитанную на единицу длины. Впервые Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин заметили, что момент сил трения, с которыми жидкость действует на цапфу, не одинаков с моментом сил трения, действующих на подшипник. Если через $\bar{P}$ и $\overline{M}$ обозначить полную

силу и момент трения, приходящиеся на цапфу, а P и M — полную силу и момент, приходящиеся на подшипник, то условия равновесия цапфы и подшипника приводят к равенствам

$$\overline{M} = M + P \cdot OO' \quad \text{и} \quad \overline{P} = P$$

Как видно, момент трения $\overline{M}$, действующий на цапфу, оказывается отличным от момента $\overline{M}$, действующего на подшипник, и разница между ними возрастает тем сильнее, чем больше увеличивается эксцентриситет OO'. Это обстоятельство имеет место в опытах со смазкой. В них измеряют не момент M или $\overline{M}$, а некоторый момент M', который прикладывают к подшипнику, чтобы его удержать в равновесии. Если ввести этот новый момент M' и предположить, что нагрузка на подшипник P проходит через центр цапфы O, то оказывается, что измеряемый момент M' будет

$$M' = M + P.OO'.$$

В зависимости от величины сжатия c имеем следующую таблицу, характеризующую отношение моментов $\overline{M}$ к M.

$c =$	0.0	0.1	0.4	0.6	0.9
$\dfrac{\overline{M}}{M} =$	1	1.03	1.51	2.69	13.8

[6] В формулах $(25)_1$, $(25)_2$, $(25)_3$, а также в формулах (26) и (27), в оригинале введены обозначения χ_1, χ_2, χ_3, которые в остальном тексте заменены через X_1, X_2, X_3, поэтому в тексте введены всюду одинаковые обозначения: X_1 вместо χ_1, X_2 вместо χ_2, X_3 вместо χ_3.

[7] В оригинале сделаны описки:

$$\theta_2' = \pi - \alpha \text{ вместо } \theta_2' = \pi - \alpha_1,$$
$$\theta_{3,0} = \pi + \alpha \text{ вместо } \theta_{3,0} = \pi + \alpha_1.$$

[8] Формула $(30)_2$ должна быть написана в форме

$$\frac{a^2}{6\mu(U_0 - U_1)}(p_2 - p_0) = A_{2,0}\alpha + \cos(\alpha - \Phi_0)' +$$
$$+ \frac{A_{2,2}}{2}\sin 2(\alpha - \Phi_0) + \ldots \frac{A_{2,2n}}{2n}\sin 2n(\alpha - \Phi_0) +$$
$$+ \frac{A_{2,2n} + 1}{2n + 1}\cos(2n+1)(\alpha - \Phi_0) + A_{2,0}\alpha_1 - A_{2,1}\cos(\alpha_1 + \Phi_0) +$$
$$+ \frac{A_{2,2}}{2}\sin 2(\alpha_1 + \Phi_0) + \ldots \frac{A_{2,2n}}{2n}\sin 2n(\alpha_1 + \Phi_0) -$$

$$- \frac{A_{2,2n+1}}{2n+1} \cos(2n+1)(\alpha_1 + \Phi_0) \ldots \Big\} \qquad (30)_2$$

[9] Формула $(31)_2$ в соответствии со сказанным в примечании 8 должна иметь вид

$$0 = A_{2,0}\alpha_1 + A_{2,1}\sin\alpha_1 \sin\Phi_0 + \frac{A_{2,2}}{2}\sin 2\alpha_1 \cos 2\Phi_0 + \ldots$$
$$+ \frac{A_{2,2n}}{2n}\sin 2n\,\alpha_1 \cos 2n\,\Phi_0 +$$
$$+ \frac{A_{2,2n+1}}{2n+1}\sin(2n+1)\,\alpha_1 \sin(2n+1)\,\Phi_0. \qquad (31)_2$$

[10] Вместо формулы $(32)_2$, должно стоять

$$S_2 = A_{2,0}\alpha_1 - A_{2,1}\cos(\alpha_1 + \Phi_0) + \frac{A_{2,2}}{2}\sin 2(\alpha_1 + \Phi_0) + \ldots$$
$$+ \frac{A_{2,2n}}{2n}\sin 2n(\alpha_1 + \Phi_0) - \frac{A_{2,2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)(\alpha_1 + \Phi_0) \ldots \qquad (32)_2$$

Указанные в примечаниях 8 — 10 разницы в знаках не влияют на точность выводов Н. П. Петрова, и в дальнейшем мы на них останавливаться не будем.

[11] Во всех своих работах по гидродинамической теории смазки Н. П. Петров подчеркивает важное значение внешнего трения смазочного слоя о поверхности цапфы и подшипника. Таким образом, Н. П. Петров не считает, что один коэффициент абсолютной вязкости смазочной жидкости μ характеризует все явления смазки. Следовательно, он считает, что необходима еще одна характеристика смазочной жидкости, определяющая ее поведение на поверхности цапфы и подшипника.

[12] Н. П. Петров в дальнейшем делает попытку оценить величины коэффициента внешнего трения жидкости λ_0 и λ_1 на основании всех известных до 1900 г. опытных данных и приходит к выводу, что для приблизительных расчетов можно принять

$$\frac{\mu}{\lambda_0} + \frac{\mu}{\lambda_1} = 0.$$

[13] В табл. 1—7 Н. П. Петров снова пишет величины, не сообразуясь с прежними обозначениями. Нужно писать, как принято в тексте: X_1 вместо χ_1, X_2 вместо χ_2, X_3 вместо χ_3.

[14] Рассуждения Н. П. Петрова о праве пренебречь силами инерции в уравнениях движения вязкой жидкости в пространстве между

цапфой и подшипником недостаточно убедительны. Новейшие исследования проф. Н. И. Мерцалова и проф. Е. М. Гутьяра показали необходимость учета инерционных сил, существующих в смазочном слое, чем и объясняются некоторые отступления от приближенной теории, развитой Н. П. Петровым.

[15] Рассуждения Рейнольдса, приводимые дальше, неубедительны и не оправдались дальнейшими исследованиями.

[16] Дальнейшие вычисления и рассуждения автора излишне сложны и требуют коренного пересмотра.

Л. С. Лейбензон

СПИСОК СОЧИНЕНИЙ Н. П. ПЕТРОВА

О ЗУБЧАТЫХ КОЛЕСАХ

1. Очертание зубчатых круглых цилиндрических колес дугами круга. Инж. журнал (1-я премия Инж. журнала), 1870.

2. Очертание зубчатых круглых цилиндрических колес дугами круга. Там же (1-я премия Инж. журнала), 1873.

3. Очертание зубчатых круглых цилиндрических колес дугами круга. Там же, 1901.

4. Заметка по поводу сочинения профессора Харьковского технологического института В. И. Альбицкого. Вестн. Об-ва технологов, 1905.

ПО ТЯГОВЫМ ВОПРОСАМ

1. Нормы расхода паровозами топлива. Изв. СПб. Технол. ин-та, 1885.

2. Курс СПб. практического Технологического института. Сопротивление поезда на железной дороге. Особ. изд., 1889.

3. Определение скорости поезда на железной дороге при возможном увеличении вероятной безопасности движения. Изв. СПб. Технол. ин-та, 1890.

4. Сравнение условий движения поездов одиночной и двойной тягой. Изв. СПб. Технол. ин-та, 1890.

5. Опасные скорости движения поезда. Там же, 1892.

6. О наивыгоднейших скоростях движения товарных поездов и о способах определения скоростей воинских поездов на железных дорогах. Инж. журн., 1892.

7. Чего можно ждать от электровозов. «Новое время», 1896.

8. Несколько соображений, необходимых при определении главных

размеров паровозов и применение их к быстроходному паровозу. Зап. Русск. техн. об-ва, 1897.

9. К вопросу о сопротивлении паровоза и силе его тяги. Там же, 1904.

ОБ ОТДЕЛЬНЫХ ЧАСТЯХ ПОДВИЖНОГО СОСТАВА

1. О непрерывных тормозных системах. Изв. СПб. Технол. ин-та, 1878.

2. Об изнашивании и пробе стальных шин. Особ. изд., 1879.

3. Насадка шин на колеса и колес на оси. Изменение их размеров и величина развивающихся в них напряжений. Журн. МПС, 1891.

4. Заметка о теплопроводности трубок паровозных котлов. Зап. ИРТО, 1897.

О ТРЕНИИ В МАШИНАХ

1. Доклад о применимости разных смазочных масел к механизмам разного рода. Там же, 1882.

2. Трение в машинах и влияние на него смазывающих масел. Инж. журн. (Ломоносовская премия ИАН и 1-я премия Инж. журн.), 1883.

3. Результаты опытов над трением вагонных осей при смазывании их различными маслами. Тр. общ. очередн. Съезда русских железных дорог (1884 г.); «Киевский инженер», 1884.

4. О трении хорошо смазанных твердых тел и о главных результатах опытов над внутренним и внешним трением некоторых смазывающих жидкостей. Журн. физ.-хим. об-ва, 1884.

5. По поводу заметки К. Л. Краевича в 3-м выпуске журнала Русского физико-химического общества. Там же, 1884.

6. Некоторые объяснения по поводу ответа Н. П. Петрову К. Д. Краевича. Там же, 1885.

7. Объяснения по поводу замечаний А. Б. на записку Н. Петрова о трении вагонных осей при смазывании их разными маслами. «Киевский инженер», 1885.

8. Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости. Описание и результаты опытов над трением жидкостей и машин. Изв. Технол. ин-та (большая Макарьевская премия АН), 1886.

9. Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости. Практические результаты опытов и гидродинамической теории трения с применением к железным дорогам и бумагопрядильням, с тремя приложениями: элементарного вывода формул, выражающих силу трения цапфы и пяты; описания способов и приборов для определения трения

жидкостей; описание приборов и способов испытания трений в машинах. Там же, 1887.

10. Трение в машинах. Заметка по поводу статьи Н. Е. Жуковского и А. В. Гречанинова. Там же, 1887.

11. Описание прибора для определения внутреннего трения жидкостей и инструкция для употребления и содержания прибора в исправности. Особ. изд., 1889. (На выставке нефтяного производства, бывшей в Петербурге в 1888 г., ИРТО удостоено высшей премии — золотой медали).

12. Resultats les plus marquants de l'etude theorique et experimentale sur le frottement médiant. Особ. изд., 1889.

13. Sur le frottement des liquides. Bulletin de l'Academie Imperiale des Sciences de St.-Pétersbourg. Зап. императорской Академии Наук, 1896.

14. Физический способ определения достоинств смазывающей жидкости. Зап. ИРТО, 1899.

15. Frottement dans les machines. Зап. ИАН, 1900.

16. Procédé de determination des qualités d'un liquide lubrifiant. Rapport presenté par N. Petroff. Congres International des methodes d'essai des materiaux de construction, tenu a Paris du 9 au 16 Juillet. Тр. названного Конгресса, 1900.

17. Записка, доложенная Комиссии для обсуждения способов исследования оливкового масла. Зап. ИРТО, 1900.

18. Записка по поводу статьи Е. С. Федорова «Анализ формулы Пуазейля». Там же, 1903.

19. Гидродинамическая теория трения до работы Зоммерфельда и сущность сделанного им шага вперед. Там же, 1905.

20. Влияние трения при передаче работы упругим ремнем. Изв. СПб. Технол. ин-та, 1893.

21. Влияние трения при передаче работы упругим ремнем. Подтверждение теории, представленной мною в 1893 г. Там же, 1894.

О РЕЛЬСАХ

1. Об изнашиваемости рельсов на Николаевской и СПб.-Варшавской железных дорогах. Особ. изд., 1882.

2. Влияние поступательной скорости колеса на напряжение в рельсе. Зап. ИРТО, 1903.

3. Влияние поступательной скорости колеса, упругости основания и неправильности рельса и колеса на напряжение в рельсе. Там же, 1903.

4. Постепенное развитие и современное состояние вопроса о напряжениях, вызываемых в рельсе вертикальными силами. Железнодорожное дело, 1904.

5. Определения геометрического места точек приложения спокойно действующей нагрузки на рельс, лежащий на шести упругих опорах. Зап. ИРТО, 1904.

6. Постоянные напряжения в рельсах. Железнодорожное дело, 1904.

7. Влияние поступательной скорости колеса на напряжение в рельсе при отступлении колеса от круглой формы и рельса, лежащего на шести опорах, от прямолинейного вида. Зап. ИРТО, 1905.

8. Несколько объяснений по поводу помещенных в «Железнодорожном деле» статей А. А. Васютинского и И. Р. Стецевича, вызванных сочинением Н. Петрова о напряжениях в рельсе. Железнодорожное дело, 1905.

9. Сравнение результатов теории определения напряжений в рельсах с результатами опытов Дудлея. Там же, 1905.

10. Напряжения в рельсах от изгибов в вертикальной плоскости и вероятность определения этих напряжений опытами. Зап. ИРТО, 906.

11. Напряжения в рельсах от вертикальных давлений катящихся колес. Влияние скорости и исправности вида колес. Изд. Инж. совета МПС, 1907.

12. Un moyen de determiner les deformations du rail soutenu par des supports mobiles sous la pression d'une roue usée en mouvement.. Особ. изд., 1910.

13. К вопросу о прочности рельсов. Изд. Особ. комисс. для всестор. исследов. ж.-д. дела в России. Вып. LXXXVIII, 1912.

14. К вопросу о прочности рельсов. Там же, 1912.

15. Давление колес на рельсы. Прочность рельсов и устойчивость пути. Особ. изд., 1915.

ПО ДРУГИМ ТЕХНИЧЕСКИМ ВОПРОСАМ

1. Перегрузка и хранение хлебного зерна. Перегрузка каменного угля. Особ. изд., 1882.

2. Отчет председателя Комиссии для исследования на месте дела сооружения Сибирской железной дороги товарища министра путей сообщения инженер-генерал-лейтенанта Петрова. Изд. МПС, 1894.

3. Теоретическое объяснение двигателя системы Маевского. Зап. ИРТО, 1902.

4. Речь председателя 1-го Электротехнического съезда. Тр. Съезда (Приложение № 1), 1900.

5. Речь председателя Международного железнодорожного конгресса в Петербурге при открытии Конгресса. Тр. Конгресса, 1902.

6. Соображения инженер-генерала Петрова по вопросу об усилении горных участков Сибирской железной дороги: Ачинск — Нижнеудинск и Зима — Половина. Изд. Комитета Сибирской железной дороги, 1903.

7. Речь при открытии Съезда выработки мероприятий к распространению железа в России. Тр. Съезда, 1903.

8. Discour de N. Petroff a la Séance de cloture du VIII Congres International des chemins de fer a Bern (Suisse). Тр. Конгресса, 1903.

9. Перевод трактата Максуелла об электричестве и магнетизме. Неизданная рукопись (хранится у М. Н. Петрова), 1902.

ПО ВОПРОСАМ ПРОСВЕЩЕНИЯ

1. Речь, характеризующая деятельность Г. Е. Паукера. Инж. журн., 1882.

2. Речь при открытии императорского Инженерного училища. Журн. МПС; Журн. МНП; Зап. ИРТО, 1896.

3. Типы высших технических школ. Изд. ИРТО, 1897.

4. Чему и как нужно учиться в высших школах. «Новое время», 1897.

5. Какова должна быть высшая техническая школа. Изд. ИРТО, 1897.

6. Речь, произнесенная Н. П. Петровым на акте в Институте инженеров путей сообщения 22 июня 1899 г. Изд. Ин-та путей сообщ., 1899.

7. Образовательные задачи России ввиду распространения наших железных дорог (Речь в годовом общем собрании ИРТО). Зап. ИРТО, 1899.

8. Увеличение материальной деятельности народов в XIX в. и связь ее с науками. Там же, 1901.

9. Речь председателя РТО на 1-м общем собрании II Съезда русских естествоиспытателей и врачей. Тр. Съезда, 1901.

10. Речь при открытии 3-го съезда по профессиональному образованию. Изд. ИРТО (Дневник № 2 Съезда), 1903.

11. Нужна ли материальная помощь ученым трудам профессоров технических школ? Отд. изд. (Гос. типография), 1905.

12. Речь, произнесенная на торжественном чествовании в Инженерной академии 40-летия учено-литературной деятельности Н. П. Петрова. Инж. журн., 1911.

13. К вопросу о приготовлении для промышленности инженеров. Журн. МНП, 1915.

СОДЕРЖАНИЕ

Трение в машинах и влияние на него смазывающей жидкости . . . 7

Практические результаты опытов и гидродинамической теории трения машин в применении их к железным дорогам и бумагопрядильням . . . 229

Трение в машинах . . . 361

Приложения

Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин. О трении смазочного слоя между шипом и подшипником . . . 483

М. Н. Петров. Творец гидродинамической теории трения — Николай Павлович Петров . . . 506

Л. С. Лейбензон. Послесловие . . . 536

Л. С. Лейбензон. Примечания . . . 540

Список сочинений Н. П. Петрова . . . 546

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР

*

Редактор Издательства *Н. В. Кудрявцев*
Технический редактор *Н. П. Аузан*
Корректор *Н. Н Морозов*
Переплет, титул, заставки
художника *Н. М. Лобанова*

*

РИСО АН СССР № 3216. А--08865. **Издат.** № 1650. **Тип. заказ** № 796. **Подп. к печ.** 8/X 1948г. **Формат бум.** $60\times92^1/_{16}$. **Печ. л.** $34^1/_2$ + 3 вклейки. **Уч.-изд.** 27. **Тираж** 3000. **Цена в переплете** 26 руб.

2-я типография Издательства **Академии Наук СССР**
Москва, Шубинский пер., д. 10

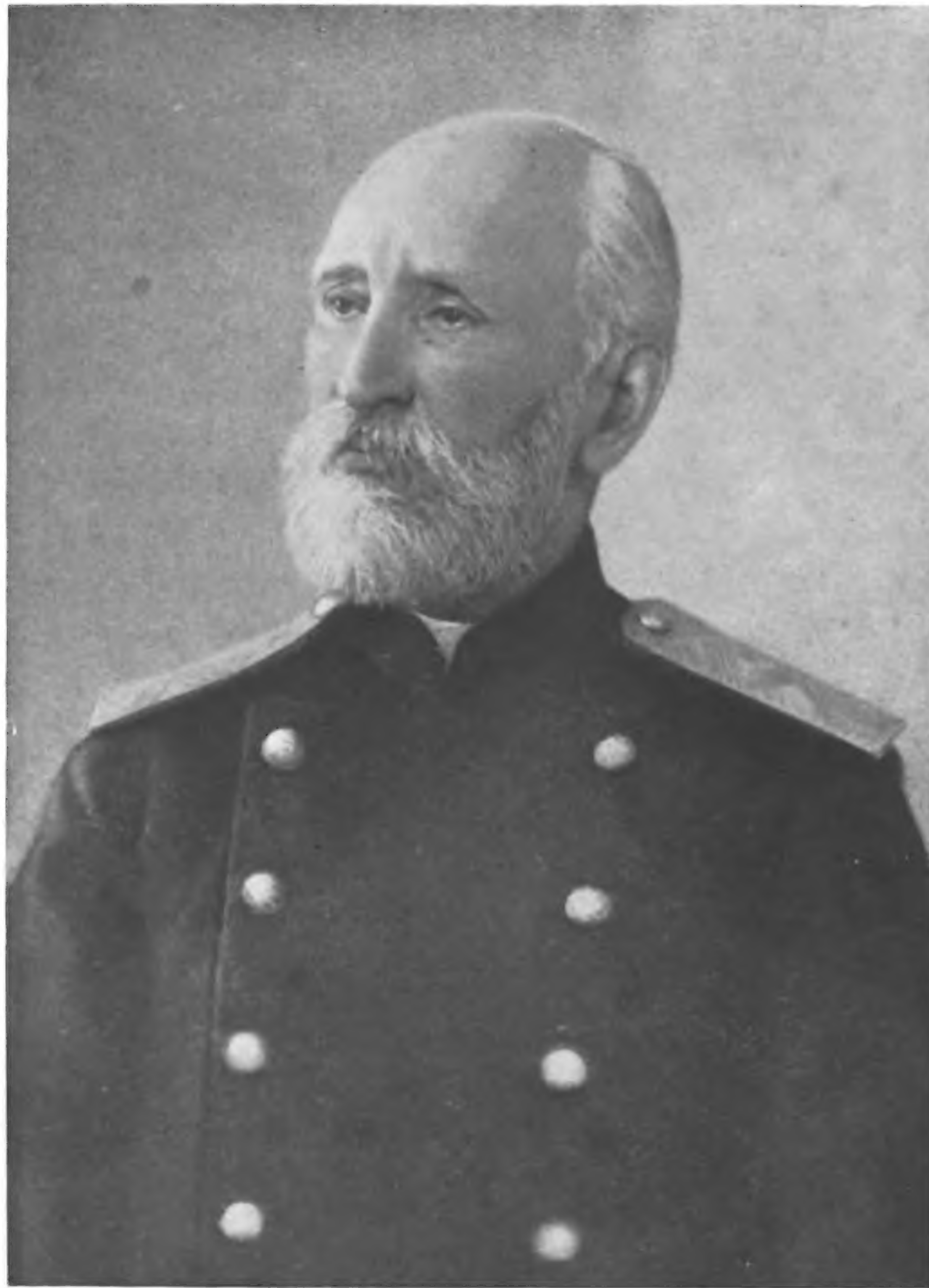
ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
123	3 сн.	$-2\mu\frac{C}{r_1^2}$	$2\mu\frac{C}{r_1^2}$
163	3 св.	от 20 70° C	от 20 до 70° C
189	7 сн.	$\frac{f_1}{f}\sqrt{\frac{p}{p_1}}$	$\frac{f_1}{f}=\sqrt{\frac{p}{p_1}}$
249	6 сн.	$\left(\varepsilon-\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda_1}\right)$	$\left(\varepsilon+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda_1}\right)$
249 250 256	ф-ла (3) 8 св. 6 и 8 св.	$\frac{\sqrt{P}}{\sqrt{p}}$	$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{P}}$
249	3 сн.	$v^2\sqrt{p_1}\sqrt{Q_1}$	$v^2\sqrt{P}\sqrt{Q}$
249	5 сн.	$\sqrt{p}$	$\sqrt{P}$
372	ф-ла (5)	$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}=0$	$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$
440	6 св.	$\frac{L}{R}=$	$\frac{L}{R}=-$
449	3 св.	φ_0	Φ_0
468	табл. 24	$\varphi_0 \mid \varphi_1 \mid \varphi_2$	$\Phi_0 \mid \Phi_1 \mid \Phi_2$
505	2 сн.	$(2+\alpha^2)\sqrt{1-\alpha^2}$	$2+\alpha^2$
522	10 сн.	не противоречила закону	не противоречила закону Ньютона


Н. П. Петров — Гидродинамическая теория смазки.



Н. П. ПЕТРОВ



Н. П. ПЕТРОВ


Величина внутреннего трения в мг/мм² при скорости в 1 мм в 1 сек
Температура °C
71.75
70
62
72
73
95
90
76
67
63
Сурепное
60.77
69
a
93
89.91
Спермацетовое
58
74.94
62
99
68
t_0
62
58
69

Фиг. 2

Н. П. ПЕТРОВ

ГИДРО-
ДИНАМИ-
ЧЕСКАЯ
ТЕОРИЯ
СМАЗКИ



26 руб.